УДК 512.55:371.214

Николаев Ю.П.,
Русаков А.А.

ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ВЗГЛЯД НА РОЛЬ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ В ШКОЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ

Ключевые слова: алгебра, кольцо, математика, информатика, специализированное образование, методическая траектория.

В прошлом году Специализированный учебно-научный центр МГУ им. М.В. Ломоносова школа им. А.Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова), созданный в 1963 г. отцами-основателями академиками Исааком Константиновичем Кикоиным и Андреем Николаевичем Колмогоровым, отметил свое 45-летие. Одна из задач профильной школы в условиях огромной протяженности территории нашей страны – вовлечь в научно-техническое творчество школьников, которые по тем или иным причинам не смогли учиться в самой школе, возможно, им несколько не повезло и среди равных случай экзамена вывел вперед в конкурсе других абитуриентов.

Успехи в математических олимпиадах и других интеллектуальных соревнованиях являются одним из основных показателей математических и естественно-научных способностей школьника. Благодаря крупным советским ученым А.Н. Колмогорову, Б.Н. Делоне, И.Г. Петровскому, П.С. Александрову и др. в 60-х гг. XX в. на базе двух крупнейших образовательных центров – МГУ им. М.В. Ломоносова и МФТИ – была организована сеть олимпиад по математике. Напомним, что первая Московская математическая олимпиада состоялась в 1936 г., правда, после этого был длительный перерыв. Наряду с выявлением победителей и формированием команды на международную олимпиаду, важной целью нового движения было привлечение школьников к изучению математики и других естественных наук, формирование специализированной сферы общения преподавателей, студентов вузов, научных сотрудников, учителей.

Математическое олимпиадное движение несет в себе соревновательный характер, воспитывает в школьниках сообразительность и способность достигать решения задачи за короткое время. Современная наука, тем не менее, требует не только и не столько высокой скорости в разрешении проблем, сколько кропотливой и методичной работы в рамках сформулированной задачи, возможно, с выходом в другие области знаний. Научные конференции для школьников «Колмогоровские чтения», проводимые на базе ведущих факультетов МГУ им. М.В. Ломоносова: механико-математического, вычислительной математики и кибернетики, физического, химического и СУНЦ; «Харитоновские чтения» (г. Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ); Всероссийская конференция-конкурс «Юниор», которая проходит в рамках Международного смотра научного и инженерного творчества школьников (International Science and Engineering Fair, ISEF), ставшие уже традиционными, знакомят участников с новейшими достижениями науки, вовлекают учащихся в научное творчество [2].

Конечно, на каждой такой конференции определяются победители, но отметим, что у этих мероприятиях есть много других отличительных особенностей. Первое, на чем стоит остановиться, – проектная работа школьника по подготовке к участию в конференции. Трудно переоценить воспитательное значение опыта школьника в реализации проекта: это самообразование, формулировка результатов, опыт публичных выступлений и общения с аудиторией.

Работа в таких творческих конкурсах является несколько отличной от средней школы способом получения знаний. Учащиеся в условиях проектной деятельности попадают в ситуацию активного знания. Даже если у тебя идеально готовый и продуманный доклад, всегда есть возможность неожиданного вопроса из зала, на который нужно ответить, «не отходя от доски», или попытаться рассуждать по теме заданного вопроса. Поэтому подготовка выступления – достаточно трудная задача, к которой сложно придумать программу или хотя бы список вопросов. Но «путь осилит идущий», и в более выгодных условиях находятся школьники, которые раньше начали участвовать в таких конкурсах.

Нужно отметить роль научного руководителя творческого коллектива: больше привлекательности имеет задача, подразумевающая дальнейшее развитие исследования.

Даже если учащийся не занял призового места, нельзя отрицать пользу той культурной среды, в которую он попал. У школьника, как и у его наставника, есть возможность посмотреть и оценить работы других участников конференции и несколько пересмотреть свои критерии удачного проекта.

Несомненно, такие встречи полезны и педагогам, вовлеченным в проектную деятельность школьников. Есть возможность поучаствовать в работе жюри секций конференции. Последние четыре года на «Колмогоровских чтениях» работает учительская секция, посвященная проблемам специализированного образования в школе.

Здесь мы приведем пример одной научно-исследовательской темы, которая может быть преобразована в несколько различных проектов для творческих коллективов школьников. Некоторые из проектов могут проходить по секции математики, некоторые – информатики.

Постановка задачи

Следуя традициям преподавания алгебры в ФМШ № 18, заложенным еще такими преподавателями, как

А.Н. Колмогоров, А.А. Шершевский, А.Н. Земляков и др., под кольцом мы понимаем непустое множество ***К***, на котором заданы две абстрактные бинарные алгебраические операции « $+$ » («сложение») и « $\cdot$ » («умножение»), удовлетворяющие следующим аксиомам.

А1. $\forall a,b \in \boldsymbol{K}:\ a+b=b+a$.

А2. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{K}:\ (a+b)+c=a+(b+c)$.

А3. $\exists\ 0 \in \boldsymbol{K}$ (нейтральный элемент): $\forall a \in \boldsymbol{K}:\ a+0=a$

А4. $\forall a \in \boldsymbol{K}\ \exists\ (-a) \in \boldsymbol{K}$ (противоположный элемент): $a+(-a)=0$.

А5. $\forall a,b \in \boldsymbol{K}:\ a \cdot b=a \cdot b$.

А6. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{K}:\ (a \cdot b)\cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.

А7. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{K}:\ c \cdot (a+b)=c \cdot a+c \cdot b$.

Иначе говоря, $\boldsymbol{K}=(K,+,\cdot)$ – ассоциативное, коммутативное кольцо. Множество ***К*** называется носителем кольца $(K,+,\cdot)$ [2].

Задача 1. Найти все кольца, носителем которых является двухэлементное множество $K=\{0;1\}$ (трехэлементное множество $K=\{0;1;2\}$).

Методическая траектория

Вполне естественно, что ни один ученик в классе, за редким исключением, не может решить эту задачу сразу. Опыт показывает, что после первых попыток школьники даже не понимают ее условия. Поэтому на ближайшем занятии происходит беседа на тему, что же такое операция и как можно задать операцию на конечном множестве.

Операцию на конечном множестве ***К*** удобно задавать в виде табличек, предварительно занумеровав элементы множества. В каждой клетке таблицы (на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца) стоит результат операции *i*-го с *j*-м элементом ***К***. В случае когда носителем является двухэлементное множество $K=\{0;1\}$, имеем:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0+0 & 0+1 \\ 1 & 1+0 & 1+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{array}$$

По возможности на уроке, а может, и как задание на дом, ставятся комбинаторные задачи о количестве операций на конечном множестве, о количестве структур с двумя операциями на конечном множестве и т.д. Итогом подсказок является идея рассмотреть все возможные варианты возникающих структур, которых конечное число (с требованием задать табличками все возможные операции на ***К***), и, опираясь на аксиомы кольца, например путем полного перебора, найти все кольца в этой ситуации.

Возможно, что комбинаторные задачи вызовут затруднения при теоретическом решении (не используя метод полного перебора), в этом случае можно предложить ученикам решить эту серию комбинаторных задач (а возможно, и задачу 1), написав программу перебора на одном из языков высокого уровня (Pascal или С++), получить ответ с помощью ЭВМ. Стоит отметить, что подобное исследование для случаев с трех- и четырехэлементными носителями с использованием элементов информатики для школьника или группы школьников будет достойным межпредметным проектом.

На следующее занятие задачу решают один-два человека в классе. Тогда мы начинаем более детально разбирать свойства операций, нейтрального и противоположного элементов. Формулируются задачи для абстрактного кольца $\boldsymbol{K}=(K,+,\cdot)$ и включаются в домашнее задание:

Задача 2. $\forall x \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $-(-x)=x$ (т.е. противоположный к противоположному элементу есть сам данный элемент).

Задача 3. $\forall x,y \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $(-x)y=-(xy)$ (т.е. результат «умножения» противоположного элементу x на элемент y есть элемент, противоположный «произведению» xy).

Задача 4. $\forall x,y \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $(-x)\cdot(-y)=xy$ (т.е. результат «умножения» противоположного элементу x на противоположный элементу y есть элемент, равный «произведению» xy).

Задача 5. $\forall x \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $x\cdot 0=0\cdot x=0$ («умножение» на нейтральный элемент всегда дает в результате нейтральный элемент).

После решения этих задач становится ясно, что не всякая «табличка-операция» описывает операцию в кольце, и тем более не всякое сочетание «табличек» дает кольцо. В итоге наглядно показывается, что полный перебор сужается до разумного, с которым легко справится большинство учащихся. Задача 1 продолжает оставаться на дом.

Полное решение задачи

Для решения нам потребуется результат задачи 5.

Лемма. $\forall x \in \boldsymbol{K}$ выполнено: $x\cdot 0=0\cdot x=0$.

Доказательство леммы:

1. $a\cdot 0=a\cdot(0+0)$ – в силу определения нейтрального элемента в кольце.

2. $a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$ – в силу дистрибутивности в кольце.

3. Получили, что $a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$. Добавим к обеим частям равенства элемент $-(a\cdot 0)$ противоположный к $(a\cdot 0)$, который существует в кольце по аксиоме А4.

4. Получим $a\cdot 0+\left(-(a\cdot 0)\right)=a\cdot 0+a\cdot 0+\left(-(a\cdot 0)\right)$.

Откуда по определению противоположного элемента $0=a\cdot 0$.

Для умножения на нейтральный элемент справа в силу коммутативности операции умножения доказательство не требуется, но в виде закрепления и тренировки можно попросить учащихся доказать это, не используя коммутативность операции «умножение».

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $K=\{0;1\}$. Выберем элемент, который будет нейтральным в кольце. Пусть это будет 0. Тогда, пользуясь результатами леммы, начнем строить табличку для операции «умножение»:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \end{array}.$$

Осталась незаполненной всего одна клетка: результат операции «умножение» 1 · 1, для которого есть две возможности – 0 или 1.

Рассмотрим случай, когда результат операции 1 · 1 = 1. Тогда, учитывая, что нейтральным элементом является 0, получаем две таблички для операции «сложение»:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array},$$

которые также отличаются значением операции на элементах 1 и 1 (1 + 1). Однако первая «табличка-операция» не является кандидатом на операцию «сложение» в кольце (не удовлетворяет аксиоме А4), так как элемент 1 не имеет противоположного при таком задании операции. Таким образом, получилось задать одну структуру кольца с операциями:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Аналогично рассматривается второй случай, когда результат операции «умножение» 1·1 = 0. Пользуясь теми же соображениями, получаем еще одну структуру кольца:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

Итак, в предположении, что нейтральным элементом является 0, мы получили два кольца на заданном множестве. Действуя аналогичным образом, мы сможем получить еще два кольца, рассмотрев предположение, что нейтральный элемент 1. Последнее утверждение легко доказать, просто заменив в полученных структурах 0 на 1 и 1 на 0.

Ответом задачи является число 4. На заданном носителе можно построить 4 кольца (следует отметить, что с точностью до изоморфизма колец с данным носителем 2, однако понятие морфизма в курсе алгебры одногодичного потока СУНЦ МГУ не рассматривается) [3].

О математике

Так сложилось в преподавании математики в школе, что аксиоматический метод на этих предметах пытаются реализовать только на уроках геометрии. В итоге поначалу у детей возникает некоторая путаница – им кажется, что геометрия – это описательная наука, нужно только научиться нужные слова ставить в нужном порядке, а когда появляются содержательные теоремы (равенство и подобие треугольников), то эти школьники сталкиваются с ситуацией нового уровня требований и пугаются этого.

Алгебра перетекает из курса арифметики, который строится больше на интуитивных понятиях и не требует обоснований, и, как итог, мы имеем дисбаланс: в таком обширном и более понятном, чем геометрия, курсе алгебры за всю среднюю школу мы можем вспомнить только пару теорем (теоремы Виета прямая и обратная, да основная теорема арифметики о разложении составного числа на простые множители, более продвинутые вспомнят теорему Безу и теорему о рациональных корнях многочлена). Геометрия, напротив, в силу аксиоматического начала, предоставляет несколько серий содержательных теорем, от которых у нормального подростка голова должна идти кругом. В результате мы имеем странное отношение к геометрии, вплоть до того, что школьники отрицают этот предмет настолько, что боятся даже прочитать задачи по геометрии, которые предлагаются на экзаменах по математике в вузах или вариантах ЕГЭ.

В настоящее время, как нам кажется, общество находится немного на другом этапе своего информационного и урбанистического развития. Дети, в своем большинстве, уже не участвуют в постройке дома, заготовке сена, дров, не управляют лошадью и т.д. Однако подростки с легкостью осваивают современную электронно-вычислительную технику, навигацию в сети Интернет, различные ролевые тактические компьютерные игры. Таким образом, меньше работы идет с геометрическими объектами и их отношениями (перспектива, проекция, подобие и т.д.), а больше с абстракциями, что ближе находится к алгебре. Поэтому в средней школе у ребенка больше эмпирического опыта в арифметике и алгебре, чем в некоторых геометрических конфигурациях. В этих условиях, нам кажется, лучше бы вводить в школе аксиоматический подход с элементов алгебры (или таких предметов, как теория вероятности).

Введение системы аксиом в преподавание алгебры преследует прежде всего цель заронить новый взгляд на уже знакомые числовые системы. Чтобы ученик не очередной раз вспоминал уже когда-то зазубренные определения натуральных, целых, рациональных и других чисел, которые традиционно вводятся в школе согласно некоторому историческому пути зарождения, а структуры, имеющие общее ядро (носитель, операции, их свойства).

Главная цель изучения абстрактной алгебраической структуры кольца – структурирование и систематизирование школьных знаний различных числовых систем; дать понимание, что число – это не самостоятельный объект, наделенный некоторыми свойствами, а элемент некоторой числовой системы, наследующий свойства этой системы по отношению к другим объектам.

Действительно, фраза: «Число два является рациональным целым простым четным числом» звучит несуразно, потому что здесь в одну кучу собраны понятия разных числовых систем. Понятие четности относится к системам целых и натуральных чисел и означает, что число, элемент системы, делится на число 2, что трудно себе представить в системе рациональных чисел, где любое число можно разделить на 2. Понятие простого числа относится к системе натуральных чисел, так как только эта числовая система обладает свойством, что любое подмножество ее носителя имеет минимальный элемент.

Хотелось обратить внимание на воспитательную роль рассмотренной задачи. Ее постановка уже ставит в тупик даже образованного матшкольника, иначе говоря, независимо от уровня подготовленности, образованности при решении этой задачи все попадают в равные условия. Однако процесс решения задачи иллюстрирует и призывает проявить такие человеческие качества, как смелость, целеустремленность, настойчивость.

Нужно напомнить, что прошло уже 20 лет со времени создания СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова (до 1989 г. СУНЦ был специализированной физико-математической школой-интернатом Главного управления народного образования при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, которая была открыта 2 декабря 1963 г.) [3; 4]. В школе существуют пять специализаций обучения: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая; для одногодичного обучения – только физико-математическая. Система обучения – лекционно-семинарская. На каждом уроке по профилирующим дисциплинам работают одновременно два-три преподавателя, что позволяет обеспечить более полно индивидуальный подход в учебном процессе и значительно повысить эффективность обучения. Подчеркнем, что в статье речь идет о преподавании алгебры школьникам, которые обучаются в школе ровно один год (одногодичный поток). Естественно, отобранные из различных школ 40 регионов России дети стартуют на уроках математики с различным багажом.

Ежегодный опыт решения и обсуждения задачи 1 в классе ставит еще одну проблему, с которой сталкивается педагог, учитель почти ежедневно в своей практике – проблема отметки и оценки. Если ученик решил задачу правильно – здесь все ясно, а если он не решил задачу – огромное количество вариантов. Когда урок начинается фразой: «Дети, кто не сделал домашнее задание?», есть два варианта реакции преподавателя в случае положительного ответа. Отметим, что такой ответ требует определенной смелости и должен быть оценен учителем. Первый вариант – наплевательское отношение учащегося к предмету, это, в частности, означает потерю контакта ученика и учителя, здесь практически неуместно говорить об образовательном процессе. Второй вариант состоит в оправдании ученика за несделанное задание, которое может быть самым разным. Например, когда школьник утверждает, что много времени и сил потратил на одну задачу из домашнего задания, и даже показывает 2–3 исписанных листка (попытки решения задачи, заведомо не доведенные до ответа), объясняя, что увлекся этой задачей и не хватило времени на остальные. Совершенно ясно, что эта ситуация не заслуживает неудовлетворительной отметки, а может, даже достойна поощрения. Возможно, что школьник преуспел в некоторых пунктах задачи, продемонстрировал такие свои качества, как трудолюбие, настойчивость, смелость, но конкретно эта задача в целом не была доведена до ответа. Оценивая ситуацию с домашним заданием, необходимо ставить перед собой вопрос: насколько удачна эта предложенная система задач? Наш принцип в оценивании: «только постоянное ощущение успешности школьником – мотивация к увлеченности математикой».

Решение задачи 1 в полном объеме с первого раза (за неделю) не есть наша цель, поэтому первый раз задача ставится последним номером, является необязательной и не влияет на отметку, и более того, некоторое или существенное продвижение в этой задаче заслуживает дополнительной «пятерки» на уроке. Мы занимаемся ею в течение месяца, который отводится на изучение колец, их свойств и некоторых задач из накопленного дидактического материала, только после этого задача становится обязательной для всех [3].

Работа над этой задачей позволяет достигнуть несколько целей:

- напомнить способы задания отображений (операция-табличка);
- сделать очередное вкрапление изучения элементов комбинаторики (количество операций, коммутативных операций на *n*-элементном множестве), которая не выделяется отдельной темой в программе курса алгебры в силу ограниченности времени;
- учащимся приобрести и закрепить навыки работы с аксиомами;
- дифференцировать учащихся по уровню подготовленности, обучаемости, склонности и интересам в различных областях естественнонаучного знания.

Все это позволяет спроектировать для каждого учащегося индивидуальную траекторию дальнейшего обучения в одногодичном потоке. С 1 октября в школе на постоянной основе начинают работу различные факультативы, спецкурсы, кружки и спецсеминары. С учетом выявляемых склонностей и желаний происходит профилизация школьников (учительский совет), начиная с аннотации программ факультативов и спецкурсов, знакомство с тематикой научно-исследовательских проектов, рекомендации к участию в олимпиадах и математических соревнованиях, а по завершении обучения – выбор вуза (факультета).

Литература

1. *Земляков, А.Н.* Тезисы по алгебре / А.Н. Земляков // Математическое образование. 2000. № 4 (15). С. 2–40.
2. *Николаев, Ю.П.* Научное творчество школьников – это серьезно? / Ю.П. Николаев, А.А. Русаков, А.А. Степанов // Современные информационные технологии и ИТ-образование: сб. трудов Второй международной науч.-практ. конф. М.: МАКС Пресс, 2006. С. 244–250.
3. *Николаев, Ю.П.* Проблемы методики преподавания в профильной школе-интернате / Ю.П. Николаев // Информационные технологии в образовании: Материалы Международной науч.-практ. конф. Томск, 2008.
4. *Русаков, А.А.* Проектирование методической системы обучения математически, творчески одаренных детей на основе реализации идей А.Н. Колмогорова: дис. ... д-ра пед. наук / А.А. Русаков. М., 2006.