

УДК 374.3.316.453

КОНЦЕПТУАЛЬНО ОБОСНОВАННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ДЕФИНИЦИИ ПОНЯТИЯ «КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ЦЕЛОЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО»

Ключевые слова: выявления каузальной связи, дефиниция, идея о возможности выражения бесконечного, имя и знак, количество, конечное множество, построение дефиниции, смысл и значение объекта, содержание понятия.

Покотилова А.В.

*старший преподаватель
Таганрогского государственного
педагогического института*

Перспективными инновациями в вузовском обучении считаются образовательные технологии. Учебное знание, входящее в информационный компонент образовательной технологии, ориентированной на формирование фундаментальных и системных профессиональных знаний, должно иметь форму теории [5].

Создание теории требует наличия хорошо обоснованного предшествующего знания – фундаментальных положений теории, и связано с развитием его *понятия-идеи*, так как именно последнее позволяет объединить остальные понятия познаваемого в систему и создать целостный конкретный образ предмета познания.

Арифметическая часть большинства начальных курсов математики основана на системе количественных целых неотрицательных чисел. Поэтому репрезентация последней в целях использования ее в образовательной технологии, целенаправленной на фундаментализацию математической подготовки будущих учителей начальной школы, должна иметь форму теории, а именующее ее понятие – дефиницию, адекватную требуемому уровню знания.

Переход от чувственного познания к абстрактному мышлению – это переход от отображения мира в ощущениях, восприятиях и представлениях к отражению его в понятиях, суждениях и теориях.

Предметом познания является то, что обозначено *именем* (формируя суждение о чем-то, человек вынужден употреблять имя этого чего-то, и именно давая чему-либо имя, он превращает это что-то в предмет мысли). Имя – это языковое выражение, которое, будучи соотнесенным в качестве *знака* с каким-либо предметом познания, превращает его в предмет мысли [2].

Имена делят на собственные (название одного предмета) и нарицательные (название ряда однородных предметов). Первые служат для подчеркнута конкретного называния отдельных предметов и являются дифференциаторами, а вторые – для выражения понятия об определенном классе предметов и являются классификаторами [1].

Так как объекты становятся предметами мысли в результате установления отношения именования посредством введения знака, то важнейшим из типов отношений знаков к обозначаемым ими объектам является именование – отношение, в котором знак выступает в качестве имени того, что он обозначает [2].

Знак – это любой материальный предмет, который в общении и мышлении людей служит представителем предмета (вещей, их свойств и отношений). Основные характеристики знака – предметное значение и смысл. Предметное значение знака – это то, представителем чего он является; смысл знака – это такая связанная со знаком информация о предмете, которая достаточна для мысленного выделения этого предмета. Смысл является посредствующим звеном между знаком и обозначаемым им предметом [там же].

Опираясь на знак, необходимо прежде всего отдавать себе отчет в том, каково именно его предметное значение. Невыполнение этого требования приводит к «зубрежке», выражающейся в том, что человек, изучая научные истины, не соотносит содержащиеся в их формулировках слова с чем-то внеязыковым (к чему, согласно принципу предметности, соответствующие утверждения науки должны относиться), и так как он запоминает лишь словосочетания, для него эти истины лишены смысла.

Знать и понимать – разные вещи. Знать – означает, что человек помнит сумму сведений, которые он может воспроизвести и в справедливости которых уверен. Понять – значит постигнуть смысл и значение объекта и разместить объект в контексте сложившегося у человека к данному моменту мировосприятия [3].

Смыслы – это определенные формы мысли; для имен это понятия. Смыслы знаков могут быть собственными (если характеристика обозначаемого выражена в самой структуре знака) и приданными (если характеристика обозначаемого принята в сообществе по соглашению или стихийно). Придание смысла языковому выражению – важный логический способ введения или уточнения предметных значений уже имеющихся терминов; осуществляется оно посредством специальной логической операции – операции определения (дефиниции). Так как основная цель дефиниции – обеспечение точных предметных значений слов языка как знаков, то обычно ее характеризуют как операцию, раскрывающую содержание понятия [2].

Дефиниция единичных и общих имен непосредственно представляет собой способ «введение понятия в науку», так как определение термина – это именно указание характеристик предметов, которые он обозначает, и если в процессе развития науки или изложения научного материала вводится новый термин, то естественно, что при этом должно быть установлено, что именно он должен представлять как знак, что будет иметься в виду при его употреблении.

В связи с этим выделяются два типа ситуаций:

- определяется понятие и затем подбирается общее имя для обозначения соответствующего ему класса предметов;

- имеется уже более или менее точно интуитивно употребляемое в научном или повседневном обиходе некоторое имя, обозначающее некоторый класс предметов, и затем определяется понятие о соответствующих предметах, отвечающее на вопрос о том, что представляют собой эти предметы.

В случае ситуации первого типа достаточно выбрать (сформировать) и указать имя. В случае ситуации второго типа к имеющемуся термину для придания ему определенного смысла и тем самым обеспечения большей надежности и строгости в его употреблении применяют операцию определения, результат которой представляет собой *суждение*, т.е. характеристику обозначаемых данным термином предметов. Суждение, взятое вместе со своей знаковой формой, называют *высказыванием* [2].

В теориях основную роль играют высказывания, выражающие законы изучаемой действительности, и высказывания, отражающие связи между терминами и с логической точки зрения являющиеся определениями соответствующих явлений.

Поскольку именно от наличия ясных определений терминов в том или ином изложении зависит ясность и точность этого изложения, постольку высказывания должны иметь ясный смысл, и во всех случаях, где необходимо точное понимание смысла утверждений и существует потребность в доказательствах высказываний, нельзя ограничиваться интуициями – в подобных ситуациях необходимо использовать понятия, имеющие дефиниции.

Основные требования к построению дефиниции и вместе с тем обязательные условия его правильности следующие [там же]:

- дефиниция должна быть ясной (так как она приписывает смысл опреде-

ляемому термину). Для этого должны быть известны предметные значения входящих в ее состав терминов, в свою очередь определенных посредством терминов, значения которых известны; так как этот процесс нельзя продолжать бесконечно, то в теории некоторое, по возможности минимальное, множество терминов принимается за исходную основу для определения остальных ее терминов;

- в дефиниции не должно быть круга. Это значит, что термин, встречающийся в определяющей части, не должен определяться через определяемый термин.

Для построения дефиниции какого-либо понятия теории, точно раскрывающей его содержание, целесообразно выявить место этого понятия в теории [4]. Это требует выявления каузальной связи между явлениями, которые предшествуют определяемому понятию и называются его *причинами* [2].

Резюмируя изложенное, концепцией построения дефиниции вводимого в теорию понятия можно считать следующую систему общелогических положений:

- 1) для построения точно раскрывающей содержание понятия дефиниции целесообразно выявлять место этого понятия в теории;
- 2) построение дефиниции понятия требует как необходимость:
 - выявления совокупности причин вводимого понятия и объективно существующей между ними каузальной связи;
 - выделения из этой совокупности подмножества исходных причин, с обязательной ориентацией на его минимизацию;
 - выявления среди причин источника возможных принципиальных ошибок при использовании уже

существующего имени вводимого понятия и, если таковые имеют (или могут иметь) место, – исключения влияния интуиции при апелляциях к соответствующему понятию (понятиям);

- 3) поскольку построение дефиниции связано с указанием предметного значения имени как знака и его смысла и с использованием отношения именования, постольку при построении дефиниции важно акцентировать использование этого отношения, а при завершении построения дефиниции необходимо конкретизировать предметное значение имени и смысл, посредством которого в понятии имя соотносится с классом предметов.

Исходя из этих положений, концепция построения дефиниции вводимого в теорию понятия может быть следующей.

Этап А. Выявление статуса понятия в теории и соответствующей ему роли понятия в функционировании теории.

Этап В. Выявление причин понятия и существующей между ними каузальной связи.

Этап С. Выделение в совокупности причин минимального подмножества исходных.

Этап D. Исследование примеров использования уже существующего имени на предмет наличия в них ошибок принципиального характера и, если таковые имеют место, выявление среди причин их источника и исключение влияния интуиции при апелляциях к нему.

Этап E. Построение дефиниции понятия в соответствии с общелогическими нормами и спецификой конкретной научной области, подчеркнута явно использующее отношение именования и конкретизирующее предметное значение имени и его смысл как знака.

В соответствии с этой концепцией построение дефиниции понятия «число» можно представить следующим образом.

Этап А. Понятие «число» относится к фундаментальным понятиям числовой системы и, как именуемое эту систему, является логическим завершением всей подсистемы ее фундаментальных понятий; естественно предположить, что оно является идейным понятием числовой системы.

Этап В. Так как понятие «число» – завершающее в подсистеме фундаментальных понятий, то его причинами являются остальные ее понятия: «множество», «конечное множество» и «количество» (названы в соответствии с существующей между ними каузальной связью).

Этап С. Понятие «множество» как исходное в математике вообще для понятия «число» – исходное.

Так как в учебной литературе понятие «конечное множество» относится к исходным, а в научной литературе его дефиниция неразрывно связана с дефиницией противоположного ему понятия «бесконечное множество», которую достаточно сложно использовать не только практически, но иногда и теоретически, то на данном этапе нет достаточных аргументов для решения вопроса о его статусе; этот вопрос остается открытым до момента обнаружения достаточных для того или иного ответа аргументов.

Так как понятие «количество» – понятие, непосредственно предшествующее понятию числа, то для построения прочного фундамента теории крайне желательно, чтобы оно не относилось к исходным, а имело дефиницию.

Этап D. Исследование примеров взаимосвязанного использования учителями начальной школы понятий «конечное множество», «количество»

и «число» показало, что многие из них не имеют адекватных представлений о них и каузальной связи между ними. Так, определяя конечно или бесконечно некоторое множество, они апеллируют либо к своей интуиции (и часто определяют вид множества неверно), либо – к житейской трактовке «множество конечно, если его элементы можно пересчитать» (т.е. используют понятие счета элементов множества как причину понятия конечности множества). Это обстоятельство решает вопрос о статусе понятия конечного множества – оно должно иметь дефиницию, исключающую влияние интуиции при определении вида конкретного множества.

Поскольку причина понятия «конечное множество» – понятие «множество» – не имеет дефиниции, постольку базой для получения его дефиниции может служить только его эмпирическое представление, сформированное в результате восприятия конечности множества. Последнее дает представление о конечном множестве как о множестве, элементы которого можно в принципе перебрать: множество представляется конечным, если (и только если) перебор его элементов в принципе может быть завершен, и – бесконечным, если (и только если) перебор его элементов в принципе не может быть завершен.

В математике имеет место идея о возможности выражения бесконечного в специфической форме, конструктивно отражающей «потенциальный, становящийся характер бесконечности, возникающей благодаря неограниченной возможности построения все новых и новых математических объектов» [6, с. 169]. Реализация этой идеи в данном случае – это введение в подсистему фундаментальных понятий числовой системы соответствующего

понятия. А именно: *цепью эффективно конечных множеств* (обозначается μ) называется совокупность множеств, удовлетворяющая условиям: (а) множество $\emptyset$ принадлежит совокупности и (б) непустое множество принадлежит совокупности, если, и только если оно равно объединению некоторого принадлежащего совокупности множества X и множества, содержащего как элемент только множество X .

Из эмпирической характеристики бесконечного множества и дефиниции цепи μ следует, что цепь является бесконечной совокупностью, состоящей из множеств: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ и т.д., и только из них. Поскольку из характеристики конечного множества следует, что множество $\emptyset$ – конечное и что если множество X – конечное, то и множество $X \cup \{X\}$ конечное, постольку цепь μ является бесконечной совокупностью конечных множеств. Учитывая это, можно рационально обосновать утверждения: «для любого конечного множества в цепи μ найдется равномощное ему множество» и «всякое множество, равномощное некоторому множеству цепи μ , является конечным». Это приводит к дефиниции: множество называется конечным, если, и только если оно равномощно некоторому множеству цепи эффективно конечных множеств, и – бесконечным, если, и только если в цепи эффективно конечных множеств нет равномощного ему множества.

Этап Е. Тезисы построения дефиниции понятия «число» в соответствии с общелогическими нормами и спецификой математики следующие.

- Совокупностью конечных множеств (обозначение M) называется совокупность множеств, для каждого из которых в цепи μ найдется равномощное ему множество. Отношение равномощности множеств (обозна-

чение $\sim$) на множестве M порождает разбиение его на классы равномо- щных конечных множеств (обозначе- ние $M/\sim$) и выделяет при этом некое присущее всем конечным множе- ствам свойство, такое что: в каждом классе разбиения все множества по этому свойству тождественны друг другу, а любые множества из разных классов по нему различны. Этим обусловлена дефиниция: *ко- личеством элементов конечного множества* называется свойство конечных множеств, порождаемое на совокупности конечных множеств эквивалентностью «множество X равномо- щно множеству Y ».

- Теоретически обоснованная возмож- ность конкретизировать количество элементов любого конечного мно- жества – это, по сути, теоретически обоснованная возможность указы- вать на каждый класс равномо- щных конечных множеств отдельно от всех остальных классов как на отдельный предмет, что возможно, если, и только если у каждого класса есть собственное имя и (или) собственное обозначение.
- Отношением именования на мно- жестве S называется биекция из множества S на множество T , если, и только если элементами мно- жества T являются знаки естественного языка; отношением обозначения на множестве S – биекция из множества S на множество K , если, и только если элементами множества K являются знаки. Элемент множества T назы- вается собственным именем своего прообраза; элемент множества K – собственным обозначением своего прообраза. Задание этих отношений связано с перебором некоторым об- разом элементов множества S .
- Установление отношений именова- ния и обозначения на множестве

классов разбиения $M/\sim$ апеллирует к понятиям: «базис классификации множества» (это подмножество клас- сифицированного множества, если, и только если в каждом классе есть его элемент и разные его элементы нахо- дятся в разных классах), «линейный базис классификации» (это строго ли- нейно упорядоченный базис классификации), «расслоение множества» (это строго линейно упорядоченная классификация множества) и «слой» (это класс расслоения).

- Из свойств цепи μ (бесконечное множество и не содержит неравных равномо- щных множеств) и опреде- ления множества M следуют зако- ны теории количественных целых неотрицательных чисел: (закон А) «множество классов равномо- щных между собой конечных множеств бесконечно» и (закон Б) «отношение равномо- щности множеств расслаи- вает множество конечных множеств на слои равномо- щных между собой множеств; цепь эффективно конеч- ных множеств является линейным базисом этого расслоения».
- Из закона А следует, что перебор классов разбиения $M/\sim$ в принципе не осуществим. Но на основании закона Б отношения именования и обозначения классов разбиения $M/\sim$ можно установить идеали- зированным образом: в цепи μ , начиная с множества $\emptyset$, выбирать последовательно по множеству и присваивать содержащему его классу разбиения $M/\sim$ собственные имя и знак (т.е. далее никакому классу их не присваивать). Например, классу, содержащему множество $\emptyset$, присво- ено имя «нуль» и знак «0»; классу, содержащему множество $\{\emptyset\}$, – имя «один» и знак «1» и т.д.
- Так как каждому классу разбиения $M/\sim$ присвоены собственное имя и

собственный знак, то справедлив ключевой закон теории количественных целых неотрицательных чисел: каждый класс равномоощных конечных множеств имеет собственные имя и знак, которые выделяют его как отдельный предмет и характеризуют количество элементов любого принадлежащего ему множества. Имя и знак любого класса разбиения $M/\sim$ в теории и практике безошибочно используются как взаимозаменяемые или, что бывает чаще, как пара, которую, не противореча логике, правомерно назвать символическим именем.

- В результате изолирующего абстрагирования символические имена стали самостоятельными предметами мысли. Это привело к формированию понятийного обобщения и общего имени – *количественное целое неотрицательное число*. Поэтому суждение «количественное целое неотрицательное число – это собственное символическое имя класса конечных множеств, тождественных по свойству “количество элементов множества”, имея ясный смысл и правильную форму естественного языка, фактически является результатом дефиниции: *количественным целым неотрицательным числом* называется собственное имя-символ класса конечных множеств, тождественных по порождаемому на совокупности конечных множеств эквивалентностью «множество X равномоощно множеству Y » свойству «количество элементов множества».

- Из дефиниции следует, что количественное целое неотрицательное число – это знак, имеющий конкретное предметное значение (это обозначенный им класс равномоощных между собой конечных множеств) и конкретный смысл (характеризует количество элементов любого множества, находящегося в обозначенном им классе).

Поскольку понятие «количественное целое неотрицательное число» отражает ключевой закон теории и создает целостный конкретный предмет изучения – множество количественных целых неотрицательных чисел, постольку оно действительно является идейным понятием системы количественных целых неотрицательных чисел. Последующее построение теории количественных целых неотрицательных чисел это подтверждает.

Литература

1. Бондалетов, В.Д. Русская ономастика: учеб. пособие для студ. пед. ин-тов по спец. № 2101 «Рус. яз. и лит.» / В.Д. Бондалетов. М.: Просвещение, 1983.
2. Войшвилло, Е.К. Логика: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Е.К. Войшвилло, М.Г. Дегтярев. М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2001.
3. Гусинский, Э.Н. Введение в философию образования / Э.Н. Гусинский, Ю.И. Турчанинова. М.: Логос, 2001.
4. Кандаки, Т.Л. Значения терминов и системы значений научно-технических терминологий / Т.Л. Кандаки // Проблемы языка науки и техники. Логические, лингвистические и историко-научные аспекты терминологии. М.: Наука, 1970.
5. Покотилова, А.В. К вопросу об адекватности учебного содержания образовательной технологии, целенаправленной на фундаментализацию профессиональной подготовки / А.В. Покотилова // Научная мысль Кавказа. 2006. Спецвыпуск. № 6.
6. Рузавин, Г.И. Философские проблемы оснований математики / Г.И. Рузавин. М.: Наука, 1983.