УДК 37.016:511–028.31+159.928.238

Гунашева М.Г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ С ПАРАМЕТРАМИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Ключевые слова: уравнения и неравенства с параметрами, логическое мышление, исследовательская деятельность, единый государственный экзамен.

© Гунашева М.Г.,2010

Разнообразие педагогических систем и теорий обучения математике создает широкую палитру мирового опыта, ставящего сложные насущные проблемы осмысления и универсализации передовых методических идей и концепций. Взаимопроникновение методологий и эффективный мониторинг образовательных систем все время совершенствуются, чтобы соответствовать потребностям в адекватном отражении существа и целостности математических знаний.

Современная педагогика предполагает, что старшая школа, сохраняя образовательное ядро, должна быть профильной, способной дать углубленную подготовку в различных направлениях: математическом, гуманитарном и др. Педагогика современного школьного образования учит, что в основной школе математика должна быть универсальной, единой, показывая свою роль и место в жизни общества. При этом особое внимание должно уделяться формированию у школьников фундаментальных знаний средствами прежде всего математики, вычислительной и алгоритмической культуры, функционального и модельного мышления. Не случайно известный математик и педагог А.Я. Хинчин считал, что высокий уровень математического мышления является необходимым элементом общей культуры человека.

В подтверждение всего вышеизложенного приведем исследование на тему «Уравнения и неравенства с параметрами». В некоторых уравнениях и неравенствах коэффициенты или свободные члены заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами. Эти параметры могут принимать любые значения, в зависимости от смысла исследуемой проблемы. Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. В школьном курсе алгебры задания с параметрами рассматриваются редко, поэтому их решения вызывают трудности у школьников. Учителю необходимо познакомить учащихся с приемами решения уравнений и неравенств с параметрами. Учащихся нужно учить умению четко представлять ситуацию, о которой будет идти речь, логически рассуждать, сопоставлять, устанавливать зависимость между величинами. Рассматривая задания с параметрами, проверяют технику владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащихся и их математической культуры.

Изучение решения задач с параметрами предполагает:

– формирование у учащихся интереса к математике, развитие их логического мышления, смекалки, математических способностей, подготовку к ЕГЭ;
– развитие у учащихся исследовательской и познавательной деятельности;
– обеспечение условий для самостоятельной творческой работы, что всецело отвечает установкам основных утверждений современной педагогики.

Решение уравнений, задач с параметрами открывает перед учащимися значительное число приемов общего характера, ценных для математического развития личности. Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются с другими задачами. При решении задач с параметрами важно знакомить учащихся с различными способами решения, а не отдавать предпочтение какому-то одному способу.

Решение уравнений и неравенств с параметрами можно считать деятельностью, близкой к исследовательской. Это обусловлено тем, что выбор метода решения, процесс решения, запись ответа предполагают определенный уровень сформированности умений анализировать, вызывать и проверять гипотезу, обобщать полученные результаты. При их решении используются не только типовые алгоритмы, но и нестандартные методы, упрощающие решение. Ученик должен знать, что при выполнении работы он может выбрать любой способ решения, важно, чтобы задача была решена правильно и рационально. Опыт показывает, что обучить всех учащихся решению задач с параметрами уровня С на ЕГЭ невозможно. Желательно познакомить всех учащихся с понятиями «параметр», «задача с параметром», формировать осознанный подход к решению задач с параметрами, ознакомить их с аналитическим и графическим методами решения уравнений и неравенств с параметрами. Важно, чтобы учащиеся перестали «бояться» параметра в задачах и пытались отыскать их решения. И при подготовке к ЕГЭ мы считаем необходимым познакомить учащихся с приемами решения заданий с параметрами уровня С. Наиболее трудной частью решения уравнений и неравенств с параметрами является исследование процесса в зависимости от параметра.

Решить уравнение с параметрами означает:

– исследовать, при каких значениях параметра уравнение имеет корни и сколько их при различных значениях параметра;
– найти все выражения для корней и указать для каждого из них те зна-

чения параметра, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

Далее приведем решения некоторых уравнений и неравенств из школьного курса математики.

Пример 1. Решить уравнение

$$a^2(x - 2) - 3a = x + 1.$$

Решение.

$a^2x - 2a^2 - 3a = x + 1$,

$(a^2 - 1)x = 1 + 2a^2 + 3a$,

$(a - 1)(a + 1)x = 2a^2 + a + 2a + 1$,

$(a - 1)(a + 1)x = a(2a + 1) + (2a + 1)$,

$(a - 1)(a + 1)x = (a + 1)(2a + 1)$;

из этого уравнения получим:

$$x = \frac{2a+1}{a-1},\ (a+1) \neq 0.$$

Ответ. При $a \neq 1$ и $a \neq -1$ $x = \dfrac{2a+1}{a-1}$;

при $a = 1$ решений нет;

при $a = -1$ x – любое число.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left||x| - 3 + a\right| = 4$ имеет ровно три корня.

Решение. По определению модуля числа только модули чисел 4 и –4 равны числу 4, поэтому получаем

$|x| - 3 + a = 4$ $|x| - 3 + a = -4$

$|x| = 7 - a$ (1) $|x| = -1 - a$ (2)

Уравнение $|x| = b$ имеет два корня, если $b > 0$; один корень, если $b = 0$; не имеет корней, если $b < 0$. Исходное уравнение имеет ровно три корня тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет один корень, а уравнение (2) имеет два корня, или (1) имеет два корня, а (2) имеет один корень:

$$\begin{cases} 7 - a = 0 \\ -1 - a > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7 \\ a < -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 - a > 0 \\ -1 - a = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a < 7 \\ a = -1. \end{cases}$$

Решение в совокупности $a = -1$.

Пример 3. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a + 3 = 0$ будет наименьшей?

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни данного уравнения. Тогда в силу теоремы Виета получаем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 - 2(a+3) = a^2 - 2a - 6$.

Нужно выяснить, при каком a выражение $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a - 6$ принимает наименьшее значение. Здесь можно ошибиться. Если рассмотреть $a^2 - 2a - 6$ на множестве $a = (-\infty; +\infty)$, то наименьшее значение достигается в точке $a = 1$. Но при $a = 1$ исходное уравнение вообще не имеет корней, так как дискриминант оказывается отрицательным. Здесь нет противоречия, а есть лишь ошибка, допущенная по невнимательности. Дело в том, что $a^2 - 2a - 6$ надо исследовать не на всей числовой оси параметра a, а лишь на том его подмножестве M, на котором дискриминант исходного уравнения неотрицателен. В данном случае подмножество M задается неравенством:

$a^2 - 4(a + 3) \geq 0$, $M = (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$.

Рассмотрим $a^2 - 2a - 6$ на M. Ясно, что на $(-\infty; -2)$ $a^2 - 2a - 6$ убывает и его наименьшее значение на $(-\infty; -2)$ достигается в точке $a = -2$ и оказывается равным 2. На $[6; +\infty)$ $a^2 - 2a - 6$ возрастает и его наименьшее значение достигается в точке $a = 6$ и оказывается равным 18. Следует, что наименьшее значение $a^2 - 2a - 6$ на всем подмножестве M достигается в точке $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

Пример 4. Решить неравенство

$$9^{x+1} + 8a \cdot 3^x - a^2 < 0. \qquad (1)$$

Решение. Введем подстановку $y = 3^x$, и неравенство примет вид:

$$9y^2 + 8ay - a^2 < 0. \qquad (2)$$

Используя теорему Виета, убеждаемся, что корнями уравнения являются $y_1 = -a$ и $y_2 = \dfrac{a}{9}$, поэтому решениями неравенства (2) будут значения y, лежащие между y_1 и y_2.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $y_1 < y_2$ – имеет место при $a > 0$. Решением неравенства (2) являются $y \in (-a; \frac{a}{9})$, а решениями неравенства (1) будут значения x, удовлетворяющие условию $-a < 3^x < \frac{a}{9}$. Неравенство $-a < 3^x$ выполняется при всех x, а неравенство $3^x < \frac{a}{9}$ выполняется при $x < \log_3 a - 2$.

Случай 2. Пусть $y_1 > y_2$ – имеет место при а < 0. Решением (2) является $y \in (\frac{a}{9}; -a)$, а решением неравенства (1) будут значения x, удовлетворяющие $\frac{a}{9} < 3^x < -a$. Неравенство $\frac{a}{9} < 3^x$ выполняется при всех x, а $3^x < -a$ выполняется при $x < \log_3(-a)$.

Случай 3. Пусть $y_1 = y_2$ – имеет место при $a = 0$. В этом случае неравенство (2) не имеет решений, а следовательно, не имеет решения и неравенство (1).

Ответ. Если $a > 0$, то $x < \log_3 a - 2$;
если $a < 0$, то $x < \log_3(-a)$;
если $a = 0$, то решений нет.

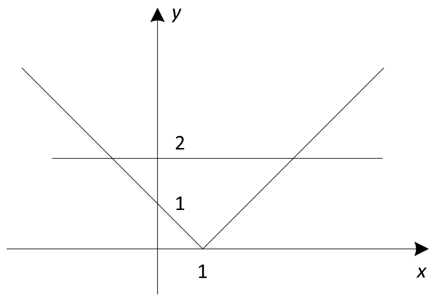
Рассмотрим задачи, которые могут быть легко решены с помощью исследования графиков функций. Графический способ иногда является удобным и быстрым способом решения уравнений и неравенств с параметрами. Решить уравнение графически – значит на одном и том же рисунке построить графики двух функций и найти их точки пересечения, абсциссы этих точек и дадут корни уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$|1 - x| = a.$$

Решение. При $a < 0$ уравнение не имеет корней. Рассмотрим случай $a \geq 0$ и построим графики двух функций $y = |1 - x|$ и $y = a$.

Из графиков видим, что при $a = 0$, $x = 1$ уравнение имеет один корень. При $a > 0$ графики пересекаются в двух точках, значит, уравнение имеет два корня: $1 - x = a$, $x - 1 = a$, отсюда $x = 1 - a$ и $x = a + 1$.



Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x + \sqrt{x-a}} \leq a$ при всех значениях параметра a.

Решение. 1) При $a < 0$ решений нет, так как квадратный корень не может иметь отрицательных значений.

2) При $a = 0$ неравенство принимает вид: $\sqrt{x + \sqrt{x}} = 0$, тогда $x + \sqrt{x} = 0$ и $\sqrt{x} = 0x = 0$.

3) При $a > 0$ неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - a \geq 0, \\ x + \sqrt{x-a} \geq a, \\ x + \sqrt{x-a} \leq a^2 \end{cases}$$

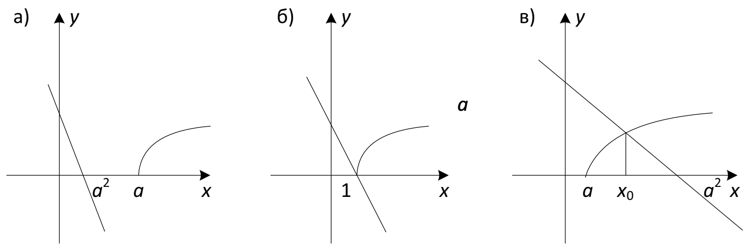
а эта система равносильна системе двух неравенств:

$$\begin{cases} x - a \geq 0, \\ \sqrt{x-a} \leq a^2 - x \end{cases}.$$

Второе неравенство из этой системы решим графически. График функции $y = a^2 - x$ – прямая, а график функции $y = \sqrt{x-a}$ – половина параболы. Нарисуем эти графики в одной системе координат:

а) если $0 < a < 1$, то $a^2 < a$. Так как вся парабола выше прямой, то решений у неравенства нет.

б) если $a = 1$, то $a^2 = a$ и графики имеют одну общую точку при $x = 1$. Следовательно, решение неравенства $x = 1$.



в) если $a > 1$, то $a^2 > a$, в этом случае решением неравенства является интервал $[a; x_0]$, где x_0 – корень уравнения $\sqrt{x-a}=a^2-x$, причем $0 < x_0 < a^2$. Для решения уравнения возведем его в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - (2a^2 + 1)x + a^4 + a = 0$, один из корней которого $x_1 = a^2 + a > a^2$ является посторонним, а второй $x_2 = a^2 - a + 1$ подходит, что легко проверить подстановкой. Следовательно, $x_0 = a^2 - a + 1$.

Ответ: $a < 0$, $x \in \varnothing$; $a = 0$, $x = 0$; $0 < a < 1$, $x \in \varnothing$; $a = 1$, $x = 1$; $a > 1$, $x \in [a; a^2 - a + 1]$.

На экзаменах прошлых лет в общеобразовательных школах Дагестана к решению заданий с параметрами редко какой ученик приступал. Дело в том, что школьная базовая программа уделяет мало времени решению задач с параметрами, предлагая рассмотреть их факультативно. Но владение приемами решения задач с параметрами можно считать одним из критериев знаний основных разделов школьной математики, уровнем математического и логического мышления. И при подготовке к ЕГЭ мы старались особое внимание обратить на задачи с параметрами. Наш опыт показывает, что учащиеся при этом глубже усваивают многие разделы алгебры и начала анализа, сами проявляют инициативу решения задач, у них постепенно вырабатываются навыки решения этих сложных задач, и заодно происходит общее повторение школьного материала, и педагогические исследования, проводившиеся нами в школе в течение 10 лет, подтверждают все вышеизложенное.

Литература

1. *Горнштейн П.И.* Задачи с параметрами. М.: Гимназия, 2002.
2. *Гунашева М.Г., Мехтиев М.Г., Эскандаров А.А.* Уравнения и неравенства с параметрами. Махачкала, 2010.
3. *Колесникова С.И.* Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ по математике. М., 2005.
4. *Мехтиев М.Г., Назаров А.Д.* Уравнения, неравенства и задачи с параметрами. Махачкала, 2000.
5. *Ястребинецкий Г.Н.* Уравнения и неравенства, содержащие параметры. М.: Просвещение, 1986.