УДК 373.545:371

Галаванова Э.А.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКА ЦЕЛОСТНОСТИ ВОСПРИЯТИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ПРОЦЕССЕ ИХ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ключевые слова: наглядное моделирование, выпуклый многогранник, геометрическая модель, наглядная модель, полупространство, система линейных неравенств.

Для того чтобы некоторый предмет был воспринят, необходимо совершить в отношении него какую-либо встречную активность, направленную на его исследование, построение и уточнение образа.

«Поскольку знание закономерностей организации целого и его восприятия является необходимым условием успеха во многих видах деятельности, можно высказать утверждение о том, что знание этих закономерностей должно стать необходимым компонентом общей культуры любого человека, и способность воспринимать целое необходимо включить в профессиональные качества» [5, с. 86].

Целостность восприятия выражается в том, что образ воспринимаемых предметов не дан полностью в готовом виде со всеми необходимыми элементами, а как бы мысленно достраивается до некоторой целостной формы на основе небольшого набора элементов. Это происходит и в том случае, «если некоторые части этого целого в данный момент не могут быть наблюдаемы (например, тыльная часть предмета)» [1].

Наглядное моделирование позволяет организовать процесс целостного восприятия математического объекта. Таким образом, для того чтобы учащиеся усвоили математические понятия и целостно овладели ими, «необходимо ввести эту целостность в виде знаковой математической модели и сделать ее усвоение целью действий учащихся в процессе наглядного моделирования объекта» [4, с. 84].

Известно, что элементы плоскостных изображений, привлекающих внимание человека, содержат участки, несущие в себе наиболее интересную и полезную для воспринимающего информацию. Поэтому в данном исследовании предпочтение отдается «наглядной модели» в смысле опоры на простые геометрические формы. Согласно известному психологу Н.Н. Ланге «процесс восприятия строится как наглядное суждение об объекте» [4, с. 71].

Огромную роль в восприятии играет наше желание воспринимать тот или иной предмет, сознание необходимости или обязанности воспринимать его, волевые усилия, направленные на то, чтобы добиться лучшего восприятия, настойчивость, которую мы в этих случаях проявляем.

Таким образом, делаем вывод о том, что в процессе восприятия первым необходимым элементом является объект восприятия. Важнейшим свойством объекта является целостность. А целостность объекта определяется его функциональным назначением в деятельности и жизни человека. Контролирующую функцию выполняет преподаватель, направляющий обучаемого, акцентирующий его внимание на отдельных этапах построения и визуализации объекта исследования с целью приобретения учащимися навыка целостности восприятия и представления математических объектов в процессе наглядного моделирования.

Практическая реализация процесса по формированию данного навыка осуществлена на примере решения транспортной задачи – задачи о составлении оптимального способа перевозки грузов, приводящей к модели выпуклого многогранника.

Анализ работы с моделями выпуклых многогранников показал, что в процессе направляющей работы учителя с учеником формируются навыки построения выпуклого многогранника даже несмотря на сильно растянутый по времени процесс построения. Внимание учащихся акцентируют на методе математического моделирования, который включает в себя несколько этапов: перевод некоторой проблемы на математический язык – формализация задачи; решение математической модели одним из математических методов – внутримодельное решение; перевод полученного результата на язык реальной проблемы – интерпретация результата.

Задача. Пусть на четыре предприятия «Нескафе», «Пеле», «Чибо» и «Якобс», специализирующиеся на изготовлении растворимого кофе, требуется завезти для переработки партию зерен кофе, который хранится на двух складах – Склад № 1 и Склад № 2. Потребность данных предприятий в зернах кофе (сырье) указана в табл. 1, а расстояния от складов до предприятий – в табл. 2. Предположим, что общий объем производства равен общему объему потребления. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок сырья, т.е. разработать маршрут перевозки зерен кофе со складов (от поставщиков) до предприятий (потребителей), чтобы в каждый пункт назначения (предприятие) было доставлено требуемое количество груза, а общие затраты на транспортировку зерна были минимальными. Приведенная формулировка транспортной задачи называется замкнутой транспортной моделью.

Таблица 1

Наличие зерен кофе (в т) на складе		Потребность в зернах кофе (в т) на предприятии			
Склад № 1	Склад № 2	«Нескафе»	«Пеле»	«Чибо»	«Якобс»
22	31	10	12	14	17

Таблица 2

Склад	Расстояние (в км) от склада до предприятия			
	«Нескафе»	«Пеле»	«Чибо»	«Якобс»
Склад № 1	8	9	7	13
Склад № 2	6	10	6	10

Решение

I этап (формализация задачи). Чтобы справиться с поставленной задачей, нам нужно составить математическую модель задачи согласно исходной информации. Информация, представленная в табл. 1 и 2, представляет собой пример использования структурной наглядности и позволяет в дальнейшем произвести несложные обозначения (пример использования формализованной наглядности): количество зерен кофе, которое нужно перевезти со склада C_1 на предприятия «Нескафе», «Пеле» и «Чибо», обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертое предприятие – «Якобс» – с этого склада нужно будет перевезти $22 - x - y - z$ зерен кофе в тоннах. А со второго склада C_2 нужно будет перевезти на предприятия соответственно $10 - x$, $12 - y$, $14 - z$, $x + y + x - 5$ зерен кофе в тоннах. Запишем эти данные в виде табл. 3 (пример структурной наглядности).

Таблица 3

План перевозок

Склад	Количество зерен кофе (в т), перевезенное на предприятие			
	«Нескафе»	«Пеле»	«Чибо»	«Якобс»
Склад № 1	x	y	z	$22 - x - y - z$
Склад № 2	$10 - x$	$12 - y$	$14 - z$	$x + y + x - 5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему линейных неравенств:

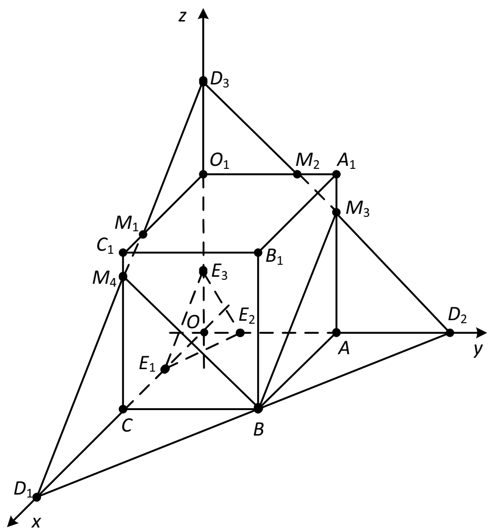
$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ z \ge 0, \\ 10 - x \ge 0, \\ 12 - y \ge 0, \\ 14 - z \ge 0, \\ 22 - x - y - z \ge 0, \\ x + y + z - 5 \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Данная знаково-символическая система есть адекватное отражение содержания табл. 3 в форме оперативной наглядности.

Объединив первые шесть строк данной системы, получим следующую систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10, \\ 0 \le y \le 12, \\ 0 \le z \le 14, \\ 22 - x - y - z \ge 0, \\ x + y + z - 5 \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Знаково-символическая система (2) воспринимается обучаемыми устойчиво и обладает оперативной наглядностью, в традиционном смысле присущей этому самому математическому объекту. Это подтверждается возможностью адекватного графического моделирования (рисунок).



Геометрическая иллюстрация объекта «выпуклый многогранник»

II этап (внутримодельное решение). Поскольку число неизвестных в задаче равно трем, решение данной задачи можно найти, используя ее геометрическую интерпретацию – еще один аспект оперативной наглядности.

Система неравенств (2) определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его наглядно увидеть, изобразим сначала многогранник, определяемый первыми тремя строками данной системы. Таким образом, педагогический расчет состоит в том, что, хорошо отработав первоначально навыки построения отдельных плоскостей и полупространств, обеспечив переход от одного этапа процесса к другому, в результате мы получим нужный продукт – механизм, лежащий в основе навыка по распознаванию и выделению целостного объекта.

1. Рассмотрим неравенство $x \geq 0$ и построим полупространство, задаваемое этим неравенством. Построим сначала плоскость, заданную уравнением $x = 0$, для чего перепишем это неравенство в виде $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \geq 0$. Теперь подставим соответствующие координаты пробной точки, например точки (0; 5; 0) в левую часть неравенства $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \geq 0$, получим $5 \geq 0$, что верно, т.е. координаты точки (0; 5; 0) удовлетворяют данному неравенству. Следовательно, точка (0; 5; 0) лежит в искомом полупространстве. Поэтому искомым полупространством является полупространство, содержащее точку (0; 5; 0) (см. рисунок). Аналогично определим полупространства, заданные неравенствами $y \geq 0$ и $z \geq 0$. Таким же образом определим полупространства, заданные неравенствами $10 - x \geq 0$, $12 - y \geq 0$, $14 - z \geq 0$. Заметим, что в процессе построения данных полупространств и фиксации вершин $A(0; 12; 10)$, $B(10; 12; 0)$, $C(10; 0; 0)$, $O(0; 0; 0)$, $O_1(0; 0; 14)$, $A_1(0; 12; 14)$, $B_1(10; 12; 14)$, $C_1(10; 0; 14)$, т.е. в результате пересечения изолированных объектов, получаем на данном этапе целостный объект – параллелепипед $ABCOO_1A_1B_1C_1$ (см. рисунок).

Полное же целостное восприятие объекта многогранник возникает в результате сложной аналитической работы с системой (2), когда выделяются одни – существенные – объекты, а отходят на второй план другие – несущественные. И воспринимаемые объекты в результате процесса наглядного моделирования объединяются в одно осмысленное, законченное и предметно-оформленное целое – многогранник ограничений.

2. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует треугольник $E_1E_2E_3$. Покажем это наглядно. Построим в координатном пространстве плоскость, заданную уравнением $x + y + z - 5 = 0$. Определим точки пересечения плоскости с осями координат.

Точка пересечения с осью Ox: если $y = 0$ и $z = 0$, то из уравнения плоскости получаем $x = 5$, т.е. $E_1(5; 0; 0)$ – искомая точка.

Точка пересечения с осью Oy: если $x = 0$ и $z = 0$, то из уравнения плоскости получаем $y = 5$, т.е. $E_2(0; 5; 0)$ – искомая точка.

Точка пересечения с осью Oz: если $x = 0$ и $y = 0$, то из уравнения плоскости получаем $z = 5$, т.е. $E_3(0; 0; 5)$ – искомая точка.

Построим найденные точки на осях координат. Соединив их отрезками прямых, получим треугольник $E_1E_2E_3$, плоскость которого, в силу теоремы о существовании плоскости, проходящей через три данные точки, и есть искомая плоскость (см. рисунок). Аналогично тому, как мы построили полупространство, определяемое неравенством $x \geq 0$, построим полупространство, задаваемое неравенством $x + y + x - 5 \geq 0$. Таким образом, искомое полупространство – полупространство, содержащее точку (0; 6; 0).

3. Построим полупространство, задаваемое неравенством $22 - x - y - z \geq 0$. Постоим вначале плоскость, заданную уравнением $22 - x - y - z = 0$. Для этого,

аналогично предыдущему, определим точки пересечения данной плоскости с осями *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно – $D_1(22; 0; 0)$, $D_2(0; 22; 0)$ и $D_3(0; 0; 22)$.

Построим найденные точки на осях координат. Соединив их отрезками прямых, получим треугольник $D_1D_2D_3$, плоскость которого, в силу теоремы о существовании плоскости, проходящей через три данные точки, и есть искомая плоскость (см. рисунок).

Найдем точки пересечения плоскости $22 - x - y - z = 0$ с гранями параллелепипеда $ABCOO_1A_1B_1C_1$:

$$\begin{cases} 22 - x - y - z = 0, \\ y = 0, \\ z = 14. \end{cases} \Rightarrow x = 8.$$

Получили точку $M_1(8; 0; 14)$.

$$\begin{cases} 22 - x - y - z = 0, \\ x = 0, \\ y = 12. \end{cases} \Rightarrow z = 10.$$

Получили точку $M_2(0; 8; 14)$.

$$\begin{cases} 22 - x - y - z = 0, \\ x = 0, \\ z = 14. \end{cases} \Rightarrow y = 8.$$

Получили точку $M_3(0; 12; 10)$.

$$\begin{cases} 22 - x - y - z = 0, \\ x = 10, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow z = 12.$$

Получили точку $M_4(10; 0; 12)$.

$$\begin{cases} 22 - x - y - z = 0, \\ x = 10, \\ y = 12. \end{cases} \Rightarrow z = 0.$$

Получили точку $B(10; 12; 0)$.

Таким образом, получили, что уравнение $22 - x - y - z = 0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед $ABCOO_1A_1B_1C_1$, образует многоугольник $M_1M_2M_3BM_4$.

Аналогично, проведя некоторые аналитические рассуждения, находим координаты вершин параллелепипеда – $C(10; 0; 0)$, $C_1(10; 0; 14)$, $A(0; 12; 10)$, $A_1(0; 12; 14)$, $B_1(10; 12; 14)$, $O(0; 0; 0)$, $O_1(0; 0; 14)$.

Далее определим полупространство, заданное неравенством $22 - x - y - z \geq 0$. Получим, что искомое полупространство – полупространство, содержащее точку (0; 6; 0).

Итак, решением системы неравенств (2) является многогранник $CM_4M_1M_2M_3BAE_2E_1E_3O_1$, вершины которого – точки $C(10; 0; 0)$, $M_4(10; 0; 12)$, $M_1(8; 0; 14)$, $M_2(0; 8; 14)$, $M_3(0; 12; 10)$, $B(10; 12; 0)$, $A(0; 12; 10)$, $E_2(0; 5; 0)$, $E_1(5; 0; 0)$, $E_3(0; 0; 5)$, $O_1(0; 0; 14)$. Назовем его многогранником ограничений.

Таким образом, отдельные части объекта мы стремимся объединить в единое знакомое нам целостное образование – многогранник. Тенденция сознания к целостности объекта, изображенного на рисунке, настолько велика, что мы даже видим стороны треугольника $E_1E_2E_3$, ребра параллелепипеда – OO_1, OA, OC, и, наконец, ребра M_1M_4 и M_2M_3, образованные в результате пересечения треугольника $D_1D_2D_3$ и параллелепипеда $ABCOO_1A_1B_1C_1$, – образующие, в конечном итоге, многогранник ограничений $CM_4M_1M_2M_3BAE_2E_1E_3O_1$.

Процесс формирования и визуализации (формализованной наглядности) модели на данном этапе завершен. Мы использовали пунктир для обозначения невидимых линий. Этот вид наглядности способствует лучшему восприятию, осмыслению и запоминанию материала – составляющим компонентам формализованной наглядности.

Для нахождения общего числа тонно-километров умножаем расстояния от складов до предприятий на перевозимое количество зерен кофе и полученные результаты складываем. Общее число тонно-километров выражается формулой $8x = 9y + 7z + {}$ $+ 13(22 - x - y - z) + 6(10 - x) + 10(12 -$

– y) + 6(14 – z) + 10(x + y + z – 5) = = 500 – x – 4y – 2z.

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 500 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{min} = 500 - f_{max}$.

Известно, что линейная функция вида $f(x; y; z) = ax + by + cz$ ($c > 0$) принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин. Это обстоятельство доказывается в учебнике по геометрии [6, с. 200] на основе некоторых геометрических соображений.

Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Сосчитаем значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(C) = 10$, $f(M_4) = 34$, $f(M_1) = 36$, $f(M_2) = 60$, $f(M_3) = 68$, $f(B) = 58$, $f(A) = 40$, $f(E_2) = 20$, $f(E_1) = 5$, $f(E_3) = 10$, $f(O_1) = 28$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 68. Тогда $F_{min} = 500 - 68 = 432$. Это значение функция F принимает в точке $M_3(0; 12; 10)$.

III этап (интерпретация). Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается табл. 4 (пример структурной наглядности).

Таблица 4

Склад	Количество зерен кофе (в т), перевезенное на предприятие			
	«Нескафе»	«Пеле»	«Чибо»	«Якобс»
Склад № 1	0	12	10	0
Склад № 2	10	0	4	17

Точка $M_3(0; 12; 10)$ показывает случай, когда общие затраты на транспортировку зерна – минимальны, т.е. со склада C_1 на предприятия «Нескафе», «Пеле», «Чибо» и «Якобс» следует перевезти 0, 12, 14 и 0 тонн зерен кофе соответственно. Со второго склада C_2 следует перевезти на предприятия соответственно 10, 0, 14, 17 тонн зерен кофе.

Эта задача, с одной стороны, содержит известные и актуальные для школьника математические понятия, такие как «точка», «плоскость», «пространство», «полупространство», «выпуклый многогранник», а с другой стороны, имеет реальное практическое значение, поскольку позволяет организовать наглядно процесс целостного восприятия математического объекта – выпуклого многогранника – при решении реальных транспортных задач. Таким образом, «внимание учащихся своевременно переключается со средств наглядности на полученную с их помощью информацию об объекте и обратно» [3, с. 262].

Отметим, что для решения подобных транспортных задач, приводящих к целостной модели выпуклого многогранника и делающих его легко обозримым, у школьников предварительно нужно сформировать весь необходимый математический аппарат, а именно: аналитический способ задания плоскости линейным уравнением с тремя неизвестными; построение в координатном пространстве плоскости, заданной линейным уравнением; аналитический способ задания полупространства линейным неравенством с тремя неизвестными; построение в координатном пространстве полупространства, заданного линейным неравенством с тремя неизвестными; решение системы линейных неравенств с тремя неизвестными. Таким образом, для создания целостного наглядного образа некоторого объекта – выпуклого многогранника, заданного системой линейных неравенств (1), нужен определенный уровень знаний об этом объекте, а именно все вышесказанное. Только в этом случае вопрос обсуждения наглядности имеет место.

Данная система контролирующих мероприятий (знаний) служит получению целостной информации об объекте, акцентированию внимания учащихся на отдельных этапах построения и визуализации объекта исследования.

Задания, направленные на формирование у школьника умений и навыков по необходимому математическому аппарату:

1. Построить в координатном пространстве плоскости, заданные уравнениями:

1) $6x + 4y + 3z - 12 = 0$; 2) $6x + 3z - 12 = 0$; 3) $3z - 12 = 0$ [2, с. 62–65].

2. Построить в координатном пространстве полупространства, заданные неравенствами:

1) $3z - 12 \geq 0$; 2) $6x + 3z - 12 \geq 0$; 3) $6x + 4y + 3z - 12 \geq 0$ [там же, с. 66–67].

В заключение отметим, что «наглядное моделирование в обучении математике может быть средством для достижения сущности новых знаний, формирования будущей профессиональной ориентировочной основы учебной деятельности» [5, с. 22]. А «целостность является тем основным звеном, которое связывает различные знания, впечатления, волевые устремления в единое целое, служит не только ориентиром, но и опережающим качественным критерием эффективности процесса обучения» [там же, с. 81]. Более того, «системная реализация в процессе обучения математике всех видов наглядности выступает фактором формирования целостных образов математических объектов, а значит, способствует усвоению математических знаний» [4, с. 240].

Литература

1. Большой психологический словарь / сост. Б. Мещеряков, В. Зинченко. М.: Олма-пресс, 2004.
2. *Галаванова, Э.А.* Об обучении школьников старших классов построению алгебраических и геометрических моделей плоскости и полупространства / Э.А. Галаванова // Сборник материалов III региональной науч.-практ. конф. «Колмогоровские чтения – 2007». Владикавказ: ВНЦ РАН, 2008. С. 60–70.
3. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учеб. пособие для студ. пед. ин-тов по спец. 2104 «Математика» и 2105 «Физика» / А.Я. Блох [и др.]; сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. М.: Просвещение, 1985.
4. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002.
5. *Смирнов, Е.И.* Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: учеб. пособие / Е.И. Смирнов. Ярославль: ИПК «Индиго», 2007.
6. *Смирнова, И.М.* Геометрия: учеб. пособие для 10–11 кл. естеств.-науч. профиля обучения / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. М.: Просвещение, 2001.