

УДК 378.14.014.13; 378.14.015.62

Ерусалимский Я.М.

РАЗВИТИЕ СИМВОЛЬНОГО ЯЗЫКА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Ключевые слова: символичный язык математики, базис, матрица перехода, матрица линейного оператора.

Каждая наука говорит на своем языке – создает свои понятия, термины и т.п. Математика (как, впрочем, и физика, и отчасти химия) еще и пишет на своем языке. Этот «письменный язык» математики мы называем иероглифическим (символьным). Наличие иероглифического языка делает математику несколько закрытой наукой и затрудняет ее восприятие непрофессионалами и обучаемыми [1].

Характерной чертой символьного языка математики является его постоянное развитие и изменчивость. Современный математик не в состоянии читать не только математические трактаты древности, но и труды математиков средних веков. Это же создает дополнительные трудности и в обучении математике (см., например: [2–4]).

Иероглифический язык математики не стандартизирован, это также создает дополнительные сложности в обучении, восприятии и развитии самой математики, в том числе и для разработчиков редакторов математических формул. Для него характерны, как отмечено в [5], явления полисемии и омонимии. Первое состоит в том, что одним и тем же символом обозначаются разные, но родственные понятия (AB может в геометрии обозначать прямую, отрезок, луч). Второе состоит в том, что один и тот же символ может обозначать различные, не родственные понятия (AB может обозначать в геометрии прямую, а в алгебре – композицию линейных операторов A и B).

О важности символьного языка математики хорошо сказано в [6]: «Каждый математический символ имеет строго определенное значение; замена его другим символом или перестановка на другое место, как правило, влечет за собою искажение, а подчас и полное уничтожение смысла данного высказывания. Учащийся, не

привыкший еще относиться с достаточной требовательностью к точности устной речи и письменного изложения, вначале может с некоторым легкомыслием отнестись к неуклонным и настойчивым приглашениям учителя математики – вести математическую запись с абсолютной точностью; эти требования могут даже показаться ему педантичными и вызвать насмешку. Однако он очень быстро убедится на собственном опыте, что несоблюдение безукоризненной точности символической записи в математике влечет за собой немедленную расплату: он сам теряет возможность понять смысл записанного, вынужден гадать, угадывает неверно и либо получает неправильный ответ, либо вообще лишает себя возможности решить задачу. В лучшем случае ему ценою значительных усилий удастся восстановить правильную запись и шествовать дальше, отправляясь от нее».

Г. Лейбниц в письме Э. Чирнгаузу писал: «Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают глубочайшую природу вещи; при этом удивительным образом сокращается работа мышления».

На развитие и совершенствование символьного языка математики в настоящее время существенное влияние оказывает родственный язык – язык информатики и программирования (см., например: [7]), имеющий много общего с символьным языком математики (в каком-то смысле его можно считать диалектом символьного языка математики). Существенным отличием символьного языка информатики и программирования от символьного языка математики является его более высокая четкость. Последнее связано

в первую очередь с тем, что он используется не только человеком, но и компьютером.

Что является основным «букварем» (носителем) математического языка? Математическая учебная литература – учебники и учебные пособия. Именно в них появляются, закрепляются и тиражируются новации в области символического языка математики. Хороший учебник отличается от плохого не только четкостью изложения материала, но и хорошим символическим языком, т.е. четкой, непротиворечивой системой математических обозначений [8].

Настоящая работа посвящена развитию символического языка линейной алгебры, который мы считаем пока далеким от совершенства. При изложении мы постараемся обойтись без определений самих математических понятий, для которых мы вводим обозначения. Основными математическими объектами, с которыми мы будем работать, являются матрицы, векторы (элементы линейных пространств) и их координаты, базисы линейных пространств, линейные операторы и их матрицы, матрицы перехода от базиса к базису. Все предлагаемые обозначения технологичны. Их нетрудно набирать не только в *Latex*, но и в редакторе математических формул *Microsoft Equation*, стандартном для *MS Word*.

Матрицы и их обозначения. Матрицы принято обозначать заглавными буквами, а их элементы – прописными, т.е. если A – матрица, то a_{ij} – элемент этой матрицы, стоящий в i -й строке на j -м месте (т.е. в j -м столбце). С точки зрения сегодняшнего дня, когда студент знакомится с понятием «матрица», он уже знаком из информатики с понятием «двумерный массив», такое обозначение для элемента матрицы становится полисемичным, для него (студента) более понятно и естествен-

но обозначение $A[i, j]$ или A_{ij} , которое мы предпочитаем употреблять. Существенным недостатком используемых сегодня обозначений является отсутствие обозначений для строки и столбца матрицы. Для обозначения i -й строки матрицы A мы используем $A[i, \square]$, а для обозначения j -го столбца матрицы — $A[\square, j]$. Наличие этих обозначений позволяет нам компактно и четко записывать свойства определителей. Например, известное свойство об определителе матрицы, полученное из матрицы умножением ее строки на число, можно записать следующим образом:

$$\det(A \xleftarrow{ij} \alpha \cdot A[i, \square]) = \alpha \cdot \det A.$$

Здесь «стрелка» с надстрочным обозначением i -й строки обозначает подстановку вместо нее того, что написано за стрелкой. Аналогичное свойство для j -го столбца матрицы:

$$\det(A \xleftarrow{ij} \beta \cdot A[\square, j]) = \beta \cdot \det A.$$

Хорошо записывается и свойство о перемене знака определителя при перемене местами двух строк матрицы:

$$\det \left(A \begin{array}{c} \xleftarrow{ik} A[k, \square] \\ \xleftarrow{k\square} A[i, \square] \end{array} \right)_{i \neq k} = -\det A.$$

Здесь же мы демонстрируем еще одну новацию, которую мы часто используем — надписи над знаками. В частности « $=$ » означает, что равенство справедливо при $i \neq k$.

Векторы и их координаты. Векторами мы будем называть элементы линейных пространств, при этом будем полагать, что пространства конечномерны и рассматриваются над полем вещественных чисел R . Зафиксируем в пространстве L базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{f\}$. Как известно, произвольный вектор $x \in L$ единственным

образом разлагается в линейную комбинацию базисных векторов, числовые коэффициенты, стоящие в этой линейной комбинации при базисных векторах, называют координатами вектора в этом базисе. Составим из координат вектора матрицу-столбец

$$(x)_{\{f\}} = \begin{pmatrix} x_{1\{f\}} \\ x_{2\{f\}} \\ \dots \\ x_{n\{f\}} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Сказанное выше о разложении вектора по базису означает следующее:

$$x = \sum_{i=1}^n x_{i\{f\}} \cdot f_i. \quad (2)$$

Чем является $(x)_{\{f\}}$? Элементом пространства L ? Большинство студентов (к сожалению) отвечает на этот вопрос утвердительно. Ясно, что $(x)_{\{f\}}$ является элементом пространства R^n . Таким образом, зафиксировав в пространстве L базис $\{f\}$, мы, заменяя вектор $x \in L$ координатным столбцом $(x)_{\{f\}}$, переходим из произвольного конечномерного пространства L размерности n в «стандартное» пространство матриц-столбцов R^n (об этом переходе мы еще поговорим в п. «Координатный оператор»).

Матрица перехода от базиса к базису. Выберем в пространстве L другой базис — $\{g\}$. Тогда у того же вектора $x \in L$ «появляется» другой координатный столбец — $(x)_{\{g\}}$. Ясно, что между матрицами-столбцами $(x)_{\{f\}}$ и $(x)_{\{g\}}$ должна существовать связь. Эта связь должна определяться не вектором $x \in L$, а базисами $\{f\}$ и $\{g\}$. Как известно, переход от координат вектора в одном базисе к координатам вектора в другом базисе осуществляется с помощью умножения координатного столбца на матрицу перехода [9]. В существующих учебниках матрицу перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$ обозначают $P_{f \rightarrow g}$ или

просто P . Второе следует признать совсем неудачным, поскольку в нем отсутствуют базисы, с которыми мы работаем. Обозначение для матрицы перехода от базиса к базису, которое мы используем, выглядит следующим образом — ${}_{\{g\}}T_{\{f\}}$. Базис $\{f\}$ мы называем «старым» или «входным», а базис $\{g\}$ — «новым» или «выходным». Буква T использована нами не случайно — с нее начинается английское слово *transaction*, обозначающее банковскую операцию перевода средств со счета на счет. «Работа» матрицы перехода описывается следующей формулой:

$$(x)_{\{g\}} = {}_{\{g\}}T_{\{f\}} \cdot (x)_{\{f\}}. \quad (3)$$

Заметим, что в существующей учебной литературе (см., например: [10]) эта матрица называлась бы матрицей перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{f\}$ и обозначалась бы $P_{g \rightarrow f}$, т.е. формула (3) в существующих имела бы вид:

$$x_g = P_{g \rightarrow f} \cdot x_f. \quad (3.1)$$

Последнее лишено, на наш взгляд, смысла, поскольку формула (3) позволяет, зная координаты вектора в базисе $\{f\}$, находить с помощью матрицы перехода координаты вектора в базисе $\{g\}$, т.е. переходить от координат вектора в базисе $\{f\}$ к координатам этого же вектора в базисе $\{g\}$. Здесь мы сталкиваемся с традициями, имеющимися в курсе геометрии, в котором говорят не о переходе от базиса к базису, а о преобразованиях координат. Читая объединенный курс «Алгебра и геометрия», мы формулу (3.1) называем формулой перехода от «старых координат» к «новым координатам». Заметим, что не все геометрические преобразования координат можно истолковывать как переход от одного базиса к другому (например, параллельный перенос не является переходом от одного базиса к другому).

Введенные обозначения порождают своеобразное исчисление матриц перехода и делают очевидными некоторые их свойства:

1. ${}_{\{f\}}T_{\{f\}} = E$. Здесь E — единичная матрица.

$$2. {}_{\{g\}}T_{\{f\}} \cdot {}_{\{f\}}T_{\{h\}} = {}_{\{g\}}T_{\{h\}}.$$

$$3. ({}_{\{g\}}T_{\{f\}})^{-1} = {}_{\{f\}}T_{\{g\}}^*$$

Свойство 2 в упоминавшемся выше учебнике В.В. Воеводина выглядит совершенно нечитаемым и требует длинного пояснения: «Пусть теперь в линейном пространстве задано три базиса $e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ и $r_1, r_2, \dots, r_n$. Переход от первого базиса к третьему можно осуществить двумя способами: либо непосредственно от первого к третьему, либо сначала от первого ко второму, а затем от второго к третьему. Нетрудно установить связь между соответствующими матрицами преобразований координат. Имеем:

$$x_e = Px_f, \quad x_f = Rx_r, \quad x_e = Sx_r.$$

Из первых двух соотношений вытекает:

$$x_e = Px_f = P(Rx_r) = (PR)x_r.$$

Откуда следует, что $S = PR$.

Таким образом, при последовательном выполнении преобразований координат матрица результирующего преобразования будет равна произведению матриц составляющих преобразований».

Заметим, сколько слов пришлось затратить для пояснения очевидного, причем формула $S = PR$ так и осталась бессмысленной без всего сопутствующего ей текста.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении матрицы перехода ${}_{\{g\}}T_{\{f\}}$, которая формулируется следующим образом: даны векторы базиса $\{f\}$ и базиса $\{g\}$ своими координатами в естественном базисе $\{e\}$. Требуется найти матрицу

перехода ${}_{\{g\}}T_{\{f\}}$. Известно (см., например: [11]), что эта матрица является решением матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} (g_1)_{\{e\}} & (g_2)_{\{e\}} & \cdots & (g_n)_{\{e\}} \\ (f_1)_{\{e\}} & (f_2)_{\{e\}} & \cdots & (f_n)_{\{e\}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

До введения обозначения ${}_{\{g\}}T_{\{f\}}$ для матрицы перехода студенты систематически испытывали затруднения с составлением матричного уравнения (4). Основной проблемой для них была следующая: с какой стороны размещать координатные столбцы базиса $\{f\}$ и с какой стороны – базиса $\{g\}$? Теперь у них появилось простое мнемоническое правило: «Стороны, по которым располагаются координатные столбцы базиса $\{f\}$ и базиса $\{g\}$, такие же, как и стороны, которые занимают соответствующие базисы в обозначении матрицы перехода ${}_{\{g\}}T_{\{f\}}$ (рис. 1)».

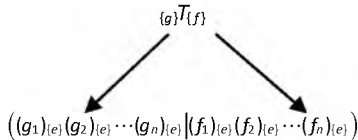


Рис. 1

Матрица линейного оператора.

Пусть L_1 и L_2 – конечномерные линейные пространства над одним и тем же числовым полем, A – линейный оператор, действующий из L_1 в L_2 . Зафиксируем в пространстве L_1 базис $\{u\}$, а в пространстве L_2 – базис $\{v\}$. Как известно, в этом случае можно говорить о матрице линейного оператора [12]. Сам термин и применяющиеся обозначения для матрицы линейного оператора (а вернее, отсутствие обозначения) мы считаем неудачными. Вместо термина «матрица линейного оператора» мы используем термин «матрица линейного оператора в паре базисов», а матрицу линейного оператора A в паре базисов обозначаем ${}_{\{v\}}A_{\{u\}}$.

Базис $\{u\}$ мы называем «входным», а базис $\{v\}$ – «выходным». Смысл матрицы линейного оператора и ее конструкция следующие:

$$\begin{aligned} (A(x))_{\{v\}} &= {}_{\{v\}}A_{\{u\}} \cdot (x)_{\{u\}}, \\ {}_{\{v\}}A_{\{u\}} &= ((Au_1)_{\{v\}}, (Au_2)_{\{v\}}, \dots, (Au_n)_{\{v\}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Обратите внимание на то, что первая формула в (5) очень похожа на формулу (3), что, конечно, не случайно (см. формулу (10)).

Ясно, что имеют место формулы:

$${}_{\{f\}}A_{\{g\}} = {}_{\{f\}}T_{\{r\}} \cdot {}_{\{s\}}A_{\{s\}} \cdot {}_{\{s\}}T_{\{g\}}^* \quad (6)$$

$${}_{\{f\}}(A + B)_{\{g\}} = {}_{\{f\}}A_{\{g\}} + {}_{\{f\}}B_{\{g\}}. \quad (7)$$

$${}_{\{f\}}(\lambda \cdot A)_{\{g\}} = \lambda \cdot {}_{\{f\}}A_{\{g\}}. \quad (8)$$

Для композиции линейных операторов справедлива формула:

$${}_{\{f\}}(A \cdot B)_{\{g\}} = {}_{\{f\}}A_{\{s\}} \cdot {}_{\{s\}}B_{\{g\}}. \quad (9)$$

Обозначения, которые мы используем, наши студенты называют «ушастыми матрицами», а формулы (6)–(9) называют «алгеброй ушастых матриц».

Вернемся к матрицам перехода. Рассмотрим в линейном пространстве L тождественный оператор E , действующий по правилу $E(x) = x, \forall x \in L$ (надпись «def» над знаком равенства означает «вводится по определению»). Зафиксируем в L два базиса $\{f\}$ и $\{g\}$. Ясно, что имеет место равенство:

$${}_{\{f\}}E_{\{g\}} = {}_{\{f\}}T_{\{g\}}. \quad (10)$$

Таким образом, матрица перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{f\}$ – это матрица тождественного оператора в паре соответствующих базисов.

Координатный оператор. Сейчас мы вернемся ко второму пункту нашего рассмотрения – «Векторы и их координаты». Мы уже говорили, что после фиксации в исходном линейном пространстве L базиса $\{f\}$ каждому элементу (вектору) $x \in L$ ставится в соответствие координатный столбец

$(x)_{\{f\}} \in R^n$, $n = \dim L$. Таким образом, у нас возникло правило, сопоставляющее произвольному элементу $x \in L$ вполне определенный элемент $(x)_{\{f\}} \in R^n$. Это правило задает оператор, действующий из L в R^n . Этот оператор будем называть координатным и обозначать ${}_{\{f\}}K$. То есть ${}_{\{f\}}K : L \rightarrow R^n$ и действует по правилу:

$${}_{\{f\}}K(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x)_{\{f\}}. \quad (11)$$

Ясно, что координатный оператор является линейным оператором, т.е. имеют место равенства:

$${}_{\{f\}}K(x + y) = {}_{\{f\}}K(x) + {}_{\{f\}}K(y), \quad \forall x \in L, \forall y \in L, \quad (12)$$

$${}_{\{f\}}K(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot {}_{\{f\}}K(x), \quad \forall \lambda \in R, \forall x \in L. \quad (13)$$

Координатный оператор обратим, т.е. существует $({}_{\{f\}}K)^{-1} : R^n \rightarrow L$, действующий по правилу:

$$({}_{\{f\}}K)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i. \quad (14)$$

Имеет место следующая диаграмма (рис. 2):

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{A} & L_2 \\ {}_{\{g\}}K \downarrow & & \uparrow ({}_{\{f\}}K)^{-1} \\ R^n & \xrightarrow{{}_{\{f\}}A_{\{g\}}} & R^n \end{array}$$

Рис. 2

Заметим, что координатный оператор в явном виде в учебной литературе вводится впервые.

Билинейные и квадратичные формы. Рассмотрим билинейную форму $F : L \times L \rightarrow R$. Зафиксируем в линейном пространстве L базис $\{u\}$. Ведem в рассмотрение матрицу билинейной формы F в базисе $\{u\}$ — ${}_{\{u\}}M_{F\{u\}}$, заданную равенством:

$${}_{\{u\}}M_{F\{u\}}[i, j] \stackrel{\text{def}}{=} F(u_i, u_j). \quad (15)$$

Ясно, что действие формы F задается формулой:

$$F(x, y) = ((x)_{\{u\}})^t \cdot {}_{\{u\}}M_{F\{u\}} \cdot (y)_{\{u\}}. \quad (16)$$

Связь между матрицами билинейной формы в разных базисах задается формулой:

$${}_{\{v\}}M_{F\{v\}} = ({}_{\{u\}}T_{\{v\}})^t \cdot {}_{\{u\}}M_{F\{u\}} \cdot {}_{\{u\}}T_{\{v\}}. \quad (17)$$

Покажем теперь, как удачная система обозначений «работает», упрощая доказательство теорем. В качестве примера приведем доказательство теоремы о том, что если F — симметрическая билинейная форма, то существует такой базис пространства L , в котором матрица формы диагональна (теорема о существовании невырожденного линейного преобразования, приводящего симметрическую билинейную форму к диагональному виду).

▲ Зафиксируем в пространстве L базис $\{e\}$ и превратим линейное пространство в евклидово, введя скалярное произведение формулой:

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} ((x)_{\{e\}})^t \cdot (y)_{\{e\}}. \quad (18)$$

Ясно, что базис $\{e\}$ ортонормирован. Рассмотрим в полученном евклидовом пространстве линейный оператор A , заданный следующим:

$${}_{\{e\}}A_{\{e\}} \stackrel{\text{def}}{=} {}_{\{e\}}M_{F\{e\}}. \quad (19)$$

Так как форма F симметрична, ее матрица симметрическая, а поскольку базис ортонормирован, то оператор A , заданный формулой (19), самосопряжен. Для самосопряженных операторов существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора, в котором матрица самосопряженного оператора диагональна. Обозначим этот базис $\{g\}$. Перейдем к этому базису. По формуле (6) получаем:

$$\begin{aligned} \text{«Диагональная матрица»} &= \\ &= {}_{\{g\}}A_{\{g\}} = {}_{\{g\}}T_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times_{\{e\}} T_{\{g\}} &= \text{св-ва матриц перехода} \\ &\times_{\{e\}} A_{\{e\}} \cdot \times_{\{e\}} T_{\{g\}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису ортогональна, поэтому $(\times_{\{g\}} T_{\{e\}})^{-1} = (\times_{\{g\}} T_{\{e\}})^t$. Подставляя последнее в (20), получаем

$$\begin{aligned} \text{«Диagonalная матрица»} &= \\ (\times_{\{g\}} T_{\{e\}})^t \cdot \times_{\{e\}} A_{\{e\}} \cdot \times_{\{e\}} T_{\{g\}} &= \\ = (\times_{\{g\}} T_{\{e\}})^t \cdot \times_{\{e\}} M_{F(e)} \cdot \times_{\{e\}} T_{\{g\}} &= \times_{\{g\}} M_F. \quad \blacktriangle \end{aligned} \quad (17)$$

Квадратичную форму можно считать сужением симметрической билинейной формы на диагональ декартова произведения $L \times L$, поэтому для квадратичных форм мы используем аналогичные обозначения.

Приведенная система обозначений использована в учебнике [13], ставшем победителем всероссийского конкурса учебников нового поколения, проведенного Государственным комитетом РФ по делам науки и высшей школы РФ, и в учебном пособии [14]. Учебник опубликован издательством «Лань» (СПб.) четырьмя изданиями общим тиражом 14 тыс. экземпляров и рекомендован Минобрнауки РФ в качестве учебника для естественнонаучных направлений и специальностей. Учебное пособие опубликовано двумя изданиями и рекомендуется для направлений подготовки «Механика и математическое моделирование», «Фундаментальная информатика и информационные технологии». Наш опыт использования указанных учебника и пособия показал, что новая система обозначений в разделе «Линейная алгебра» существенно облегчает усвоение студентами достаточно сложного материала и уменьшает количество ошибок, допускаемых ими [15; 16].

Библиография

1. Хинчин А.Я. О воспитательном эффекте уроков математики // Математика: хрестоматия по истории, методологии, дидактике / сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. С. 243–263.
2. Хинчин А.Я. Указ. соч.
3. Harkin, J.B. and G.R. Rising, 1973. Some Psychological and Pedagogical Aspects of Mathematical Symbolism. Educational Studies in Mathematics, 5 (1): 255–260.
4. Ainley, J. et al., 2009. Algebraic Thinking and Mathematics. In: Proceedings of CERME 6, January 28th – February 1st 2009 (pp. 415–419). Lyon.
5. Костин С.В. Система обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений // Математика в высшем образовании. 2009. № 7. С. 39–80.
6. Хинчин А.Я. Указ. соч.
7. Прокопчук Ю.Ю., Широков А.И., Умрихин В.В. Информатика. М.: МИСИС, 2000.
8. Ерусалимский Я. М. Современный учебник математики и требования к нему // Известия Южного федерального университета. Педагогические науки. 2010. № 1. С. 41–49.
9. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
10. Воеводин В.В. Указ. соч.
11. Воеводин В.В. Указ. соч.
12. Воеводин В.В. Указ. соч.
13. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс. 4-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2008.
14. Ерусалимский Я.М., Чернявская И.А. Алгебра и геометрия: теория и практикум. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2011.
15. Ерусалимский Я. М. Болонский учебник и наоборот. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010.
16. Ерусалимский Я.М. Современный учебник в меняющейся системе образования. Саарбрюккен: Palmarium Academic Publishing, 2013.

Bibliography

1. Khinchin, A.Ya., 2001. About educational effect of lessons in mathematics. In: Gleizer, G.D. (Ed.). Mathematics: reader on history, methodology, didactics (pp. 243–263). Moscow: published by Publishing house URAO. (rus)
2. Khinchin, A.Ya. Op. cit.
3. Harkin, J.B. and G.R. Rising, 1973. Some Psychological and Pedagogical Aspects of Mathematical Symbolism. Educational Studies in Mathematics, 5 (1): 255–260.
4. Ainley, J. et al., 2009. Algebraic Thinking and Mathematics. In: Proceedings of CERME 6, January 28th – February 1st 2009. Lyon: 415–419.
5. Kostin, S.V., 2009. Notation system for the basic multiple-valued functions of a complex variable and for their significances. Mathematics in higher education, 7: 39–80. (rus)

6. *Khinchin, A.Ya.* Op. cit.
7. *Prokopchuk, Yu.Yu., A.I. Shirokov and V.V. Umrikhin,* 2000. Computer science. Moscow: published by MISIS. (rus)
8. *Erusalimsky, Ya.M.,* 2010. Modern mathematics textbook and requirement to it. News-Bulletin of Southern Federal University. Pedagogical Sciences, 1: 41–49. (rus)
9. *Voyevodin, V.V.,* 1974. Linear algebra. Moscow: published by Nauka. (rus)
10. *Voyevodin, V.V.* Op. cit.
11. *Voyevodin, V.V.* Op. cit.
12. *Voyevodin, V.V.* Op. cit.
13. *Vladimirsky, B.M., A.B. Gorstko and Ya.M. Erusalimsky,* 2008. Mathematics. General course. 4th ed., stereotyped. St. Petersburg: published by Lan. (rus)
14. *Erusalimsky, Ya.M. and I.A. Chernyavskaya,* 2011. Algebra and geometry: theory and practice. Rostov-on-Don: published by Southern Federal University. (rus)
15. *Erusalimsky, Ya.M.,* 2010. Bologna textbook and the other way. Rostov-on-Don: published by Southern Federal University. (rus)
16. *Erusalimsky, Ya.M.,* 2013. Modern textbook in the varying system of education. Saarbruecken: Palmarium Academic Publishing. (rus)