УДК [37.016:51]+005.6

Шихалиев Х.Ш.,
Хаджарова И.М.

КУЛЬТУРА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ КАК ОДИН ИЗ АСПЕКТОВ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

Ключевые слова: комплексное восприятие объекта, культура обучения, качество знаний учащихся.

Когда мы употребляем слово «культура», мы часто понимаем его как характер поведения при общении. А на самом деле многозначность смысла этого слова охватывает и характер познания, обучения, в том числе и обучения математике. К сожалению, этот вопрос достаточно непопулярен в образовательном пространстве, хотя обучение математике занимает центральное место в процессе формирования знаний не только по математике. Познание объекта – то же самое, что проведение разведки, поиска, и каждое из этих понятий обладает своей методикой, культурой познания. Познание приобретает полноту своего смысла только в том случае, если объект изучается, познается с учетом всех его свойств, имеющих значимость в формировании мыслительной деятельности обучаемого. Другими словами, контекстом развития личности является культура.

В.И. Полищук говорит о наличии более чем 400 определений культуры. Такое многообразие дефиниций не случайно. «Культура – созданная человечеством среда, в которой человечество и обитает, – так же многообразна, как и разнолик сам человек» [2, с. 12].

Мы в своей практической работе под смыслом слова «культура» понимаем комплексное восприятие объекта при обучении математике, рассмотрение многообразия его свойств и связей с другими объектами в окружающей действительности. В частности, приведем такой пример, часто встречающийся в школьной практике. Дается следующее определение понятия «параллелограмм»: «Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны». Такое определение данного понятия является несоблюдением культуры познания. Во-первых, оно охватывает и трапецию; во-вторых, такое определение не содержит необходимого свойства понятия, здесь не только должны быть учтены две противоположные стороны, но и должно быть сказано о двух парах противоположных сторон: две противоположные стороны не только параллельны, но и равны. При таком определении расплывчатость восприятия понятия исчезает, дается гарантия недопущения ошибок в дальнейших рассуждениях с опорой на это понятие. Несоблюдение такой культуры познания (указание необходимых и достаточных свойств объекта) приводит к снижению качества знаний учащихся, к отсутствию системности в знаниях не только по математике.

Более детально мы остановимся на процессе познания темы «Площадь треугольника».

В школьном курсе математики рассматривается пять формул, имеющих отношение к вычислению площади треугольника:

1) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a h_a$;

2) $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

3) $S_{\Delta} = p \cdot r$; 4) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$;

5) $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$.

При этом редко кто из учащихся сможет их вывести или доказать, не говоря уже о разъяснении взаимосвязей между ними.

Основой всех этих формул для вычисления площади треугольника является формула, отмеченная номером 1. Читается она следующим образом: *площадь треугольника равна половине произведения длины одной из его сторон на длину высоты на эту сторону.*

Доказательство истинности этого утверждения основывается на вычислении площади прямоугольника (*произведение длины и ширины данного прямоугольника*), которое хорошо знакомо всем учащимся еще с начальных классов. Тут уместно предложить им задачу: «*Если мы смогли бы преобразовать данный треугольник в прямоугольник, то его площадь могли бы вычислить как площадь прямоугольника*». Такая связь требуется соблюдением диалектического закона познания «от известного к неизвестному», от актуального уровня мышления к ближайшему уровню. Значит, все внимание переключается на превращение треугольника в прямоугольник, на выкраивание треугольника в прямоугольник (рис. 1).

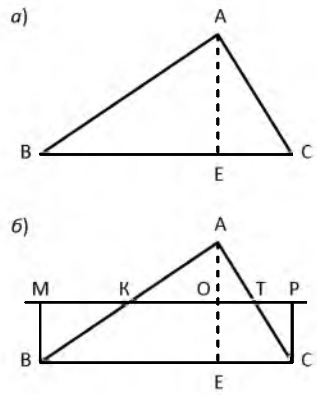

Рис. 1

Для этого проводим прямую линию через середину двух боковых сторон данного треугольника, и эта линия одновременно делит высоту на сторону CB на две равные части – верхнюю и нижнюю: $|OA| = |EO|$ (рис. 1*б*). Отделив треугольник AKT от треугольника ABC и разделив его по линии высоты на два треугольника, затем приложив их к соответствующим сторонам оставшейся части первоначального треугольника, мы получим прямоугольник $MBCP$ (рис. 1*б*). Итак, треугольник ABC переделали в прямоугольник, ничего не выбросив и ничего не добавив. Площадь полученного прямоугольника равна площади данного треугольника, где ширина прямоугольника равна половине высоты треугольника, а длина прямоугольника *MBCP* совпадает с основанием данного треугольника:

$$S_W\, MBCP = S_\Delta\, ABC = |BC| \cdot |BM| =$$
$$= a \cdot \frac{1}{2} h_a = \frac{1}{2} a h_a.$$

Цель такого подхода к вычислению площади треугольника – помочь подрастающему человеку в оптимальной полноте осмыслить сущность вопроса. Это способствует осознанию того, что им делается, и раскрытию связи с имеющимися у него знаниями. На этом можно не успокоиться. Нужно дать учащимся возможность для дальнейших поисков решения поставленной проблемы иначе. Например, не переделать треугольник в прямоугольник, а достроить его до прямоугольника (рис. 2).

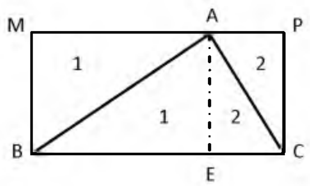

Рис. 2

Такая работа способствует повышению интереса учащихся к теме и раскрытию системности приобретаемых ими знаний. Образовавшийся прямоугольник представлен четырьмя треугольниками – двумя парами равных треугольников, из которых два составляют данный треугольник. Здесь видно, что площадь прямоугольника состоит из удвоенной площади данного треугольника, т.е. $S_W\, MBCP = 2 \cdot S_\Delta\, ABC = a \cdot h_a$. Из этого равенства следует, что $S_\Delta\, ABC = \frac{1}{2} a \cdot h_a$. В обоих случаях актуальные знания о площади прямоугольника становились базой для вычисления площади треугольника. Площадь любого треугольника вычисляется как половина площади прямоугольника, длина которого совпадает с основанием данного треугольника, а ширина совпадает с высотой треугольника на это основание. Таким образом, ближайшие знания стали актуальными, а от них нужно идти дальше – к следующим ближайшим знаниям.

Только что выведенная (доказанная) формула становится базой для дальнейших рассуждений относительно вычисления площади треугольника по другим формулам. Однако тут остается не построенный «мостик» для перехода к рассуждениям относительно доказательства других формул. Здесь нужно доказать теорему Пифагора относительно прямоугольного треугольника, с помощью которой вычисляется высота треугольника. Этот вопрос нужно поставить проблематично: *существуют три квадрата, площадь одного из которых равна сумме площадей двух других*. Такие квадраты легко построил древнегреческий математик Пифагор (рис. 3*а*): один квадрат имеет сторону, равную гипотенузе прямоугольного треугольника, а два других квадрата имеют длины, равные соответственно длинам двух катетов того же треугольника. Площадь квадрата под № 1 равна сумме площадей квадратов под № 2 и 3.

Доказательство. Построим один квадрат, сторона которого равна сумме длин катетов данного прямоугольного треугольника. Все учащиеся строят такой квадрат (рис. 3*б*). Площадь этого квадрата можно вычислить двумя способами:

1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;

2) $(a+b)^2 = 4 \cdot S_\Delta\, ABC + S_W\, APKB = 2ab + c^2$.

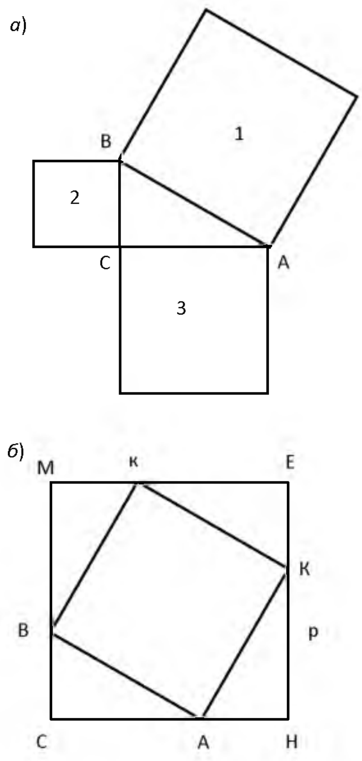

Рис. 3

Сравнивая эти равенства, получим, что $c^2 = a^2 + b^2$, где c^2 – площадь квадрата, построенного на гипотенузе, a^2 и b^2 – площади квадратов, построенных на катетах данного прямоугольного треугольника.

В известной нам и доказанной нами формуле вычисления площади треугольника $S_\Delta ABC = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ присутствует выражение h_a. Древнегреческий философ и математик Архимед (III в. до н.э.) это выражение выразил через три стороны треугольника и поставил в эту формулу. При этом получилась новая формула вычисления площади треугольника, если известны длины всех его сторон:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

которая в имеющейся литературе называется формулой Герона (I в. н.э.), через труды которого нам стало известно об этой формуле. На самом деле она была выведена Архимедом в III в. до н.э. Поэтому эту формулу можно назвать формулой Архимеда–Герона.

Доказательство этой теоремы нетрудное. При этом мы используем теорему Пифагора относительно прямоугольного треугольника (*квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*).

Дан треугольник своими тремя сторонами. Обозначим эти стороны соответственно через буквы a, b, c (рис. 4).

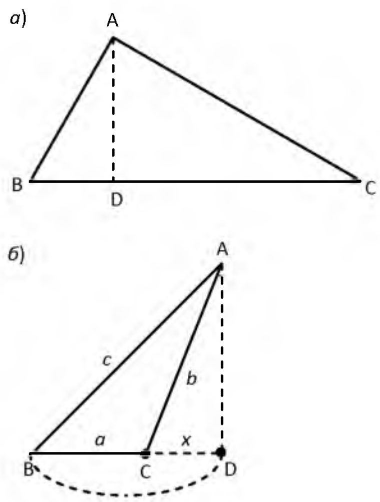

Рис. 4

Из $\triangle DCA$:

$$|AD|^2 + x^2 = |AC|^2 \Rightarrow |AD|^2 = b^2 - x^2. \quad (1)$$

Из $\triangle DBA$:

$$|AD|^2 + (a - x)^2 = c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |AD|^2 = c^2 - (a - x)^2. \quad (2)$$

Левые части равенств (1) и (2) равны, значит, равны и их правые части: $b^2 - x^2 = c^2 - (a - x)^2$.

После упрощения последнего равенства получим:

$$x = \frac{(a^2 + b^2) - c^2}{2a}. \quad (3)$$

Если мы вычислили бы $|AD|$ (рис. 4*б*), то получили бы:

$$x = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2a}.$$

Возвращаясь к равенству (1) и заменив x своим значением, получим:

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2. \qquad (4)$$

Разлагая правую часть равенства (4) на множители, получим:

$$h_a^2 = (b^2 - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a})(b + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}). \qquad (5)$$

После некоторого упрощения формулы (5) и обозначив сумму $a + b + c = 2p$, где p – половина периметра треугольника, получим:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (6)$$

Мы получили формулу вычисления длины высоты h_a треугольника по трем его сторонам. Значение длины любой другой высоты треугольника вычисляется точно так же, окончательный вариант будет отличаться только сомножителем перед корнем:

$$h_b = \frac{2}{b}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставив значение

$$h_a = \frac{2}{a}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

в формулу $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$, мы получим формулу для вычисления площади ΔABC: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника.

Взаимосвязь между вычисленными формулами площади треугольника раскрывается непрерывно, по мере знакомства с новым материалом по программе. Например, когда учащиеся знакомятся с определением тригонометрических функций, в частности с синусом и косинусом угла, исходя из прямоугольного треугольника, где $a = c \cdot \sin\alpha$, $b = c \cdot \cos\alpha$, где a – противолежащий катет углу α, b – прилежащий катет, c – гипотенуза. Если мы выражение h_a заменим своим значением: $h_a = b\sin\hat{C}$ в формуле $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a$, получим $S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot ab\sin\hat{C}$.

Следующий шаг в раскрытии такой связи реализуется тогда, когда учащиеся знакомятся с понятиями «вписанная в треугольник окружность» и «описанная около треугольника окружность». Диаметр описанной около прямоугольного треугольника окружности всегда равен его гипотенузе, значит, катет, противолежащий данному острому углу, всегда равен: $a = 2R\cdot\sin\hat{A}$, $b = 2R\cdot\sin\hat{B}$, где $2R = c$ – гипотенуза прямоугольного треугольника. Если мы вместо синуса угла C поставим свое значение: $\sin\hat{C} = \frac{c}{2R}$, получим:

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}.$$

И наконец, площадь треугольника можно вычислить, разбив его на три треугольника, соединив центр вписанной в него окружности со всеми его вершинами (рис. 5). Отрезки *OM*, *OP* и *OE* равны как радиусы вписанной окружности, они одновременно являются высотами треугольников *OBC*, *OCA* и *OAB*.

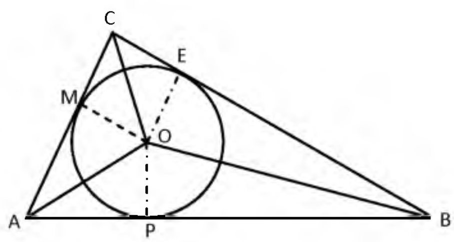

Рис. 5

Сумма площадей этих трех треугольников равна площади данного треугольника ABC: $S_\Delta ABC = S_\Delta OAB + S_\Delta OCB + S_\Delta OCA \Rightarrow S_\Delta ABC = 0{,}5cr + 0{,}5ar + 0{,}5br \Rightarrow S_\Delta ABC = 0{,}5r(c + a + b) \Rightarrow S_\Delta ABC = 0{,}5r \cdot 2p \Rightarrow S_\Delta ABC = pr$, где p – полупериметр треугольника.

Обратим внимание на взаимосвязь между всеми этими пятью формулами для вычисления площади треугольника (рис. 6).

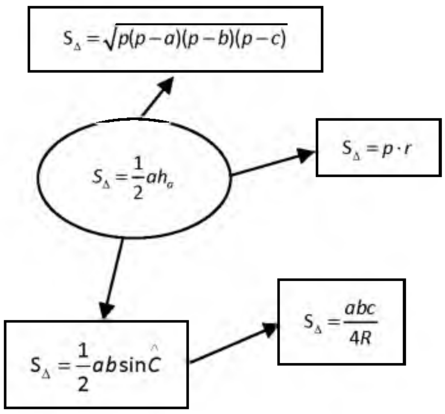

Рис. 6

Соблюдение такой культуры познания при обучении математике основано на комплексном восприятии объектов с учетом всех возможных связей между ними – как внутрипредметных, так и межпредметных. Учащийся, если он станет носителем такой культуры познания, врастает в культуру мыслительной деятельности. И эта деятельность, как отмечает В.С. Мухина, формируется через единый механизм идентификации и обособления [1].

Процесс развития собственной личности школьника и его становления культурным деятелем актуален со стороны подростка. Усвоение школьниками такой культуры познания (комплексное восприятие) происходит через деятельность, которая осуществляется в процессе познания, «присваивая себе что-то извне» (Л.С. Выготский). При этом формируется образцовый человек, который, по утверждению Г.П. Сусловой, – это человек, «усвоивший достаточный минимум знаний, владеющий продуктивными способами их приобретения, умеющий порождать новое знание, способный организовать собственную деятельность и проектировать на основе полученных знаний» [3, с. 137].

Действительно, учащийся, который познал не только взаимосвязь между различными формулами вычисления площади треугольника, но и способы их доказательств, опираясь на имеющийся у него запас знаний, не будет затрудняться при решении задач с применением этих знаний, даже в нестандартных условиях. При соблюдении такой культуры познания интеграция осуществляется как по «горизонтали», так и по «вертикали», координация учебного материала в границах познаваемого материала сопрягается с интеграцией преемственности на следующих этапах познания.

Таким образом, у учащегося формируется база учебного материала и познания объектов, и на основе этой базы он шагает от актуального уровня развития мышления к ближайшему уровню. Это и есть диалектический путь познания, путь формирования у учащихся способности к поиску новых знаний, путь к исследовательской деятельности. При этом в глазах учащихся раскрывается цель образования – процесса становления и развития личности в комплексном восприятии материала, процесса развития личности за счет трансляции основополагающих форм и методов познания. При соблюдении такой культуры познания образование будет играть стержневую роль в формировании культуры мышления школьников, культуры их познания, системности в знаниях.

Интегрированный подход в процессе обучения математике в основной школе позволяет избежать дублирования материала, создает механизм многократности повторения при разнообразных способах «подкрепления» значимой информации на различном материале, что обусловливает большую эффективность усвоения. Первоначально доказанная формула вычисления площади треугольника ($S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$) становится не только целесообразным объектом для повторения, но и стержневой линией для доказательства и вывода всех остальных формул, эта формула представляет основу интегрированного восприятия, играя роль актуального уровня развития мыслительных операций, основы формирования культуры проведения мыслительных действий.

Литература

1. *Мухина В.С.* Возрастная психология. М., 1998.
2. *Полищук В.И.* Мировая и отечественная культура. Екатеринбург, 1993. Ч. 1.
3. *Суслова Г.П.* Модель культуры школы // Школьные технологии. 2001. № 5. С. 137–145.
4. *Шихалиев Х.Ш.* Геометрия на плоскости. 5–9. Махачкала: ДНЦ, 2010.