УДК 51:101.1

Арест М.Я.

ЧТО ИЗУЧАЕТ МАТЕМАТИКА? ФИЛОСОФСКО-КАТЕГОРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ключевые слова: математика, математическое образование, логические средства, развивающиеся структуры.

Анализ ситуации

Что изучает математика? Почему математическое образование одних исчерпывается школьным курсом математики? Другие же изучают курс высшей математики, состоящий из разных разделов, которые никак не связаны между собой. Третьи изучают только математику и учат ее достаточно долго и становятся после этого математиками, которые единственные могут писать для своих же тяжелые книги, написанные очень сложным символическим языком.

Есть ли связь математики с жизнью? Ведь у очень многих людей только и остается, что умение оперировать с числами, а всякие алгебраические и геометрические идеи, не говоря уже о варварских формулах тригонометрии, – весь этот груз вылетает из головы, потому что не употребляется в повседневной жизни.

Если математика не употребляется в жизни, то зачем же ее так долго учить? Зачем мучиться с тождественными преобразованиями всяких выражений, решать тучи уравнений и неравенств? Ведь в конечном счете все это становится для очень многих балластом.

На этот вопрос отвечают так: «Математика развивает логическое мышление». Любопытно, что при этом весьма расплывчато понимается как само логическое мышление, так и процесс его развития.

Математическая наука развивается столь мощно, что уже два математика с трудом понимают друг друга, если они заняты в разных разделах математики. Разросшееся дерево математики превратилось в настоящие джунгли. Попробуйте почитать книгу по топологии или функциональному анализу, и тогда поймете.

Создается впечатление, что человечество очень здорово запуталось с математикой. Вот двухтомник математика Мориса Клайна: «Математика. Утрата определенности» и «Математика. Поиск истины». И это пишет сам математик!

Что происходит с математикой? Почему одни трудятся над разработкой логических средств, не интересуясь тем, кому нужны такие средства? Почему другие пытаются познавать мир старыми логическими средствами, ибо новые средства для них недоступны?

Все эти вопросы сегодня не только не решаются, но даже и не ставятся. Мы даже не подозреваем, что экологические кризисы, экономические кризисы, политические кризисы – все это тесным образом связано с нашим математическим образованием. Вот что сказал великий Бонапарт: «Уровень благосостояния государства определяется уровнем математического образования его граждан»

Согласитесь, что до тех пор, пока мы не выясним, что изучает математика, изучение ее самой является просто бессмысленным.

Математика и процесс познания окружающего мира

Читаем у В. Ленина «К вопросу о диалектике»: «Процесс познания – это процесс логического отражения реальной действительности в нашем сознании». Стоп! Если это процесс логического отражения, то сразу появляются вопросы:

1. Что именно мы отражаем в процессе познания?

2. Чем именно мы отражаем и каким способом пользуемся инструментом отражения?

3. Что мы получаем в качестве продуктов такого отражения?

Снова обратимся к Ленину: «Мир – это движущаяся материя, которую мы познаем все глубже и глубже». Потрясающе! Мы что-то познаем все глубже и глубже. В чем же состоит глубина такого погружения?

Предлагается начать рассмотрения не мира как движущейся материи – это довольно сложный философский вопрос. Мы рассмотрим предмет куда более простой: коробку с цветными карандашами, в которой карандаши выстроились радугой. Интересно, в чем будет состоять глубина такого погружения.

1. Первый уровень глубины.

Мы смотрим на коробку и видим перед собой цветные карандаши разных цветов. Несмотря на различие в цвете, мы способны увидеть их единство – цветность. Именно с позиции цветности они одинаковы, хотя в общем-то разные. Обычно мы говорим о том, что разное – это одно, а одинаковое – это другое. Здесь же мы увидели одинаковое в разном, и иногда это очень трудно увидеть.

Способность интеллекта видеть одинаковое в разном выражает метрическое мышление. И оно не обязательно логическое. Разве двухлетний ребенок не может увидеть одинаковое в разном? Может! Значит, уже малыш обладает метрическим мышлением.

Что мы отразили? Мы отразили однородность коробки как цветность карандашей. Чем мы отразили? Нашим интеллектом, который способен увидеть одинаковое в разном. Что мы получили как продукт отражения? Мы получили одинаковость карандашей, и все они стали единичными. Перед нами количество цветных карандашей, и нам безразлично, что у всех карандашей разный цвет.

2. Второй уровень глубины.

Снова смотрим на коробку и отмечаем, что карандаши двух видов цветов: теплые цвета и холодные. Уже образовалось две группы карандашей. Внутри каждой группы своя одинаковость. А между группами уже есть связь: связь между количествами двух тонов.

Мы видим, что возникает совершенно новое качество, и это качество показывает уже неоднородность группы цветных карандашей. В однородной группе произошел раскол. Был ли он раньше? Конечно же был! Мы не обращали на него внимания, а теперь углубили свое рассмотрение и получили связность группы или распад единой группы на две части.

Способность интеллекта видеть связанное в несвязном выражает уже топологическое мышление, и оно пришло к нам после метрического, потому что произошло развитие нашего интеллекта: мы увидели неожиданно то, что не видели раньше.

Может ли малыш увидеть связь между двумя предметами, поставив их в пару? Разумеется, может, но начинать надо с двух половинок одного предмета, в которых связь видна сразу. Постепенно мы переходим к совершенно разным предметам и все-таки находим связь.

Понятно, что связь существует не только между количествами. Теперь выясним вопрос: чем мы отражали эту связность коробки? Понятно, что интеллектом. А что получили? Получили пары из предметов, которые и выражают эту связь. Множество таких пар называется соответствием.

Существуют ли в окружающем мире связи? Все ли они настолько прозрачны, что мы их сразу обнаруживаем? Ну, это вряд ли. Некоторые связи и до сих пор не обнаружены. Нужно ли учить обнаружению связей? Конечно, нужно, ибо это открывает путь к пониманию явлений. А мы погрузимся еще более глубоко.

3. Третий уровень глубины.

Вот мы смотрим на цвета красный и оранжевый и думаем о тех карандашах, которые можно вставить между ними, чтобы по ним, как по мосту, перейти от красного к оранжевому. Сколько нужно вставить таких карандашей? Чем больше вставим – тем лучше будет виден переход цвета. Что же мы видим? Мы видим, что вставленные карандаши – детали перехода, слагаемые перехода, этапы перехода. А ведь такие переходы можно сделать между каждой парой и превратить ее в последовательность.

Мы обнаружили еще одно качество: скрытое движение от одного цвета к другому. Это движение породило соединение членов последовательности в единое целое – переход из цвета в цвет, который стоит рядом. Такое качество называется сложенностью или сложностью. Почему? Потому что наша коробка оказалась сложенной из таких последовательностей.

Но ведь мы не замечали раньше такую последовательность от цвета к цвету? Разумеется, мы еще более пристально посмотрели на коробку – и вот результат.

Способность интеллекта отражать сложность представляет аналитическое мышление. Мы еще больше продвинулись в интеллектуальном развитии: мы стали обнаруживать не только связь, но и движение.

Может ли ребенок обнаружить движение, соединяя несколько частей в единое целое? Разумеется, он это сделает. Но ведь соединение разных частей в единое целое называется интегрированием. Так что же, двухлетний малыш способен интегрировать и при этом не видеть символа интеграла? Да, это так: досимволическое представление процесса интегрирования. Но мы уходим снова на глубину.

4. Четвертый уровень глубины.

Уже заметить движение, как переход от цвета к цвету, оказалось достаточно трудно. Но еще труднее из всех цветов карандашей найти только три самостоятельных цвета, которые показывают весь процесс движения цвета. Такая цветовая основа представления цвета подобна тройке (точка; прямая; плоскость) в представлении геометрии на плоскости, подобна тройке (1; 10; 100) в представлении любых натуральных чисел в классе единиц. Можно привести еще много примеров такой основы.

В цвете такой основой является тройка (красный; желтый; синий). Можно легко показать сложение цвета: красный + желтый = оранжевый, желтый + синий = зеленый, красный + желтый + синий = коричневый. Но намного интереснее отношения: (красный; желтый) и (желтый; синий). Они представляют собой два качественных перехода и полностью определяют механизм движения цвета.

Система отношений называется структурой. В частности, в известном нам аксиоматическом методе построения математики также выделяются основные элементы (первичные понятия) и система отношений между ними (аксиом). Аксиоматический метод представляет структурный способ построения математического знания.

Система отношений (красный; желтый) и (желтый; синий) представляет структуру механизма движения цвета. Именно структурная математика и проявляется во множественной и родилась для того, чтобы мы понимали не только движение, но и механизм самого движения, его структуру.

Способность интеллекта отражать структурность содержания (находить базовые элементы и систему отношений между ними) называется структурным мышлением. Мы видим, насколько глубже структурное мышление, чем аналитическое. Если вы попробуете проструктурировать конечное количество в двоичной системе счета, то сразу придете к представлению этого количества двоичными разрядами, причем сами разряды будут представлять некоторые блоки, построенные из этого количества.

Ребенок, наученный структурировать, сразу приходит к натуральному числу с помощью только количественных отношений. Цифрой становится количество блоков одинакового формата, или, другими словами, это сенсорный подход к пониманию натурального числа.

Структурная математика (различные математические пространства, алгебраические и топологические формы) оказалась недоступной только из-за языка ее представления. Но только она способна указать нам механизмы движения, которые нельзя увидеть в самом движении.

А мы пойдем на еще большую глубину. Теперь мы хотим конструировать любой цвет по собственному заказу.

5. Пятый уровень глубины.

Нам предстоит решить самую трудную задачу: сконструировать цвет за некоторое конечное количество шагов. С одной стороны, мы всегда можем найти различные цвета и наложить их друг на друга. Но насколько затянется такой процесс, сказать трудно.

Однако есть люди, которые способны сделать это очень быстро и без всяких алгоритмов, – это художники, потому что они «чувствуют» цвет или подбирают по интуиции. Умение чувствовать или мыслить интуитивно при принятии наилучшего решения необходимо уже сегодня. Беда состоит лишь в том, что интуиция начинается с развития сенсорных каналов или с попытки сохранить природное мышление от разрушающего воздействия формальной математики.

Выбраться из-под пресса традиционного математического образования удается далеко не каждому. Ведь для этого нужно самостоятельно для себя строить математику. Можно себе представить, насколько нужно любить математику, чтобы видеть за толстой шкурой ее символических средств ее нежную душу. К сожалению, учителя математики часто лишены такой любви и способны передавать именно шкуру, надевая ее на природное мышление и закомплексовывая это мышление.

Конструирование всегда является процессом творческим, который максимально раскрывает творческий потенциал. Этот процесс нельзя заменить чисто алгоритмическим построением, потому что интуитивное решение значительно чаще бывает лучше любого, найденного алгоритмическим путем.

Способность интеллекта отражать конструктивность называется алгоритмическим мышлением. Для просчета большого количества вариантов были созданы компьютеры. Казалось бы, именно компьютеры, обладая динамической компьютерной графикой, способны развить интуитивное мышление. Однако эта весьма простая идея пока не понята системой образования.

Идея конструирования вообще слабо реализована, ибо ученики не конструируют задачи, не конструируют познавательные средства (счеты, линейки и т.д.). Гораздо больше уделяется внимания тем технологическим процессам, которые могут делать компьютеры.

Мы продолжим наше погружение в глубину.

6. Шестой уровень глубины.

Для любого цвета, сконструированного из других цветов, всегда найдется место в коробке. Причем этому цвету будет предшествовать некоторый цвет и за ним будет следовать некоторый цвет. Умение представлять любой объект как переход от предыдущего к последующему связан с проблемой прогнозирования.

Мы видим, что проблема прогнозирования требует умения диалектически мыслить. Таким образом, любая вещь всегда является предшественником чего-либо. Однако увидеть это можно с помощью систематизации.

Способность интеллекта отражать системность называется системным мышлением. Системное мышление показывает нам логику развития.

На простой коробке с цветными карандашами мы увидели шесть качественных состояний содержания любого объекта: однородность – связность – сложность – структурность – конструктивность – системность.

Мы отражали эти качественные состояния содержания, не пользуясь никакими логическими средствами. Такое познание называется чувственным или сенсорным. Если бы мы пользовались логическими средствами, которые бы разрабатывали, то такое познание называлось бы логическим.

Как в том, так и в другом случае мы отражали качественные состояния содержания объекта. Но в том случае, когда мы создаем логические средства отражения, – мы разрабатываем математическое знание. А нельзя ли пользоваться старыми логическими средствами отражения? Мы подошли к главному моменту статьи.

Что должно формировать и развивать математическое образование

Понятно, что чем сложнее содержание объекта, тем труднее его отражать логически. Как мы увидели на коробке с цветными карандашами, проще всего отражать однородность. Логическими инструментами отражения однородности являются следующие тройки: (мера: измерение; число), (отношение; координация; числовая функция) и т.д.

Указанная числовая математика представляет слабейшее средство логического отражения, предназначенное для количественного моделирования. В психологии и в социологии любые такие средства представляют в самом лучшем случае числовые вероятностные и статистические модели.

Куда более сильным средством является структурная математика, связанная со множествами и их структурированием. Работая с содержанием объекта как развивающейся структурой, такая математика способна сделать очень многое. В частности, она способна спроектировать непрерывное математическое образование, в основу которого будет положена именно современная математика.

Рассматривая математику в форме науки о развивающихся структурах, мы видим неограниченные возможности ее приложения. В самом деле, мелодия является развивающейся звуковой структурой, рисунок является развивающейся графической структурой, даже движения тела – и то можно представить развивающейся структурой.

Идея развивающейся структуры применительно к счету немедленно приводит к структурированию количества в двоичном, троичном и пятеричном базисах. Рассмотрение слова как развивающейся структуры приводит к структурированию слова и пониманию развития слова как структуры.

В этом случае математическое образование должно научить структурировать и сформировать умение видеть движение структуры. Ребенок познает мир через его структуризацию, которая приходит на смену разделенному предметному знанию.

Видение математики как науки о разработке логических средств отражения представляет ее прикладную суть как науки о моделировании, и с этой точки зрения она является прикладной наукой. Видение математики как науки о развивающихся структурах показывает ее фундаментальный смысл, адресованный любому содержанию объекта.