УДК 373.545

О ФОРМИРОВАНИИ УМЕНИЯ МОДЕЛИРОВАТЬ ВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ У ШКОЛЬНИКОВ ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССОВ

Ключевые слова: математическое моделирование, выпуклая фигура, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник, алгебро-аналитическая модель, геометрическая модель, система линейных неравенств.

Галаванова Э.А.

аспирант кафедры математического анализа Северо-Осетинского государственного университета им. К.Л. Хетагурова, стажер-исследователь отдела образовательных технологий Института прикладной математики и информатики Владикавказского научного центра РАН

Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года определяет цели общего образования на современном этапе. В ней подчеркивается необходимость «ориентации образования не только на усвоение обучающимся определенной суммы знаний, но и на развитие его личности, его познавательных и созидательных способностей» [8]. Именно развитие личности является ключевым понятием современного педагогического процесса, сущностным, глубинным понятием обучения.

Одной из основных целей современного математического образования является «формирование представлений об идеях и методах математики; о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов» [14].

Важность роли обучения школьников математическому моделированию отмечается в педагогических исследованиях Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогорова, Л.Д. Кудрявцева, А.И. Маркушевича, Г. Фройденталя [6; 7; 9; 11; 15].

После создания Р. Декартом и П. Ферма аналитической геометрии – раздела геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии, линии второго порядка) исследуются на основе метода координат, под моделью стали понимать теорию, которая обладает структурным подобием по отношению к другой теории. В этом случае две теории называют изоморфными, причем одна из них выступает моделью другой, и наоборот.

Как отмечает Л.Д. Кудрявцев, «объектами изучения в математике являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты и структуры, у которых описан ряд отношений между их элементами» [9, с. 70].

В.А. Штофф определяет «модель» как «мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте» [16, с. 19].

Для формирования у школьников умения моделировать можно использовать математический объект (понятие, выражение, неравенство, система неравенств и т.д.). В результате моделирования получаем новую информацию об объекте исследования и его свойствах.

Возьмем в качестве основного понятия выпуклый многогранник – геометрическую модель и покажем возможность обучения школьников моделированию выпуклого многогранника с помощью алгебро-аналитической модели – системы линейных неравенств, и обратно. При этом школьников профильных классов при углубленном изучении математики можно познакомить с понятием изоморфизма между этими двумя теориями (моделями).

В школьном курсе геометрии выпуклые многогранники рассматриваются как модели реальных геометрических объектов и совсем не обсуждается возможность их моделирования системой линейных неравенств, хотя наличие в содержании обучения школьников метода координат позволяет реализовать один из этапов математического моделирования – перевод задачи с одного языка (геометрического) на другой (язык алгебры).

Действительно, согласно методу координат, каждой точке прямой соответствует действительное число, каждой точке плоскости сопоставляется упорядоченная пара действительных чисел, а каждой точке пространства – упорядоченная тройка действительных чисел, и наоборот. При этом выпуклые многоугольники на плоскости определяются с помощью систем линейных неравенств с двумя неизвестными, а выпуклые многогранники в пространстве – с помощью систем линейных неравенств с тремя неизвестными, что позволяет свести некоторые геометрические задачи к алгебраическим.

Понятие выпуклой фигуры можно найти в отечественных учебниках геометрии [2, с. 182; 13, с. 68]. Например, в учебнике А.Д. Александрова дается следующее определение выпуклой фигуры: «Фигура называется выпуклой, если вместе с каждыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок» [2, с. 182].

Известные школьникам понятия «точка», «отрезок», «луч» (полупрямая), «прямая», «треугольник», «параллелограмм», «полуплоскость», «плоскость», «полупространство», «все пространство», «куб», «тетраэдр», «параллелепипед» являются примерами выпуклых фигур. В качестве простейшей выпуклой фигуры можно рассмотреть точку.

Покажем, как в процессе моделирования системой линейных неравенств с одной, двумя и тремя неизвестными соответственно задаются некоторые выпуклые фигуры.

1. Отрезок на числовой прямой

Рассмотрим одномерное пространство R – числовую прямую, элементами которого являются действительные числа. Возьмем отрезок $[a, b]$, лежащий на прямой.

В школьном курсе геометрии существует несколько подходов к определению понятия «отрезок». Так, например, в учебнике по геометрии А.В. Погорелова дается следующее определение: «Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками» [12, с. 6].

Покажем возможность моделирования отрезка [a, b] на числовой прямой с помощью системы линейных неравенств.

Известно, что точка на числовой прямой, в частности граничная точка a отрезка [a, b], разбивает числовую прямую на две полупрямые (условно называемые левой и правой соответственно), которые задаются неравенствами вида $x \le a$ и $x \ge a$. Поскольку нас интересуют только точки отрезка [a, b], а значит, точки, лежащие правее точки a, то из этих двух неравенств мы выбираем второе. Аналогичные рассуждения проводим для точки b и приходим к неравенствам вида $x \le b$ и $x \ge b$, из которых выбираем первое. Тогда сам отрезок является пересечением полупрямых, заданных неравенствами $x \ge a$ и $x \le b$, и, следовательно, для всех его точек должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} x \ge a, \\ x \le b, \end{cases} \qquad (1)$$

которая и определяет этот отрезок.

Итак, отрезок [a, b] с началом в точке a и концом в точке b на числовой прямой можно моделировать с помощью системы линейных неравенств (1).

В данном случае мы осуществляем внутриматематическое моделирование, при котором построена модель объекта, уже являющегося математическим. Алгебро-аналитической моделью отрезка (объекта исследования) на числовой прямой является полученная система линейных неравенств (1).

Пример

1. Моделью отрезка [1, 5] (рис. 1) может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 1, \\ x \le 5. \end{cases}$$

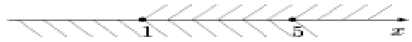

Рис. 1

2. Прямая на плоскости

Рассмотрим двумерное пространство R^2, элементами которого являются упорядоченные пары действительных чисел (x; y).

Одной из основных геометрических фигур на плоскости является прямая. Наличие в программе школьного курса алгебры и геометрии основной школы связанных между собой тем «График линейной функции» и «Уравнение прямой» говорит о наличии методической особенности в обучении математике – применения двуязычия, ядром которого является постулат аналитической геометрии: множество точек координатной плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных пар действительных чисел, тем самым подчеркивается, что график линейной функции есть прямая и, наоборот, что любая прямая задается уравнением вида:

$$ax + by + c = 0 \qquad (2)$$

где a, b, $c \in$, $a^2 + b^2 \neq 0$; x, y – неизвестные.

Рассмотрим вопрос моделирования прямой на плоскости с помощью системы линейных неравенств. Заметим, что если прямая задана уравнением (2), то неравенства $ax + by + c \ge 0$ и $ax + by + c \le 0$ определяют полуплоскости, на которые эта прямая разбивает плоскость. Поэтому алгебро-аналитической моделью прямой на плоскости может быть следующая система двух линейных неравенств:

$$\begin{cases} ax + by + c \ge 0, \\ ax + by + c \le 0. \end{cases}$$

3. Выпуклый многоугольник

В действующих школьных учебниках по геометрии [3; 5; 12] существуют различные определения понятия «выпуклый многоугольник». Так, в учебнике по геометрии А.Д. Александрова приводится следующее определение: «Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону» [3, с. 20]. Там же предлагается другое определение: «Выпуклый многоугольник является пересечением полуплоскостей, ограниченных прямыми, которые содержат стороны многоугольника». На основе этого определения становится возможным показать школьникам алгебро-аналитическое задание выпуклого многоугольника.

Определение понятия «выпуклый многоугольник», предложенное в учебнике [3], согласуется с теорией линейных неравенств, согласно которой решение системы линейных неравенств с двумя неизвестными на плоскости задает выпуклый многоугольник (ограниченную фигуру) или выпуклую многоугольную область (неограниченную фигуру).

Обратимся к вопросу моделирования выпуклого многоугольника системой линейных неравенств с двумя неизвестными. Пусть стороны выпуклого многоугольника лежат на прямых, задаваемых уравнениями:

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_mx+b_my+c_m=0,$$

где a_1, b_1, c_1, ..., a_m, b_m, c_m ∈; x, y – неизвестные; m – число сторон выпуклого многоугольника.

Тогда сам многоугольник является пересечением соответствующих полуплоскостей, и, следовательно, для всех его точек должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1\geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_mx+b_my+c_m\geq 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которая и определяет этот многоугольник. Таким образом, построение алгебро-аналитической модели выпуклого многоугольника свелось к построению системы линейных неравенств (3).

Приведем примеры моделирования некоторых выпуклых многоугольников и выпуклых многоугольных областей.

Примеры

1. Моделью треугольника (рис. 2) может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} 2y-x\leq 2, \\ 2y+x\geq -2, \\ x\leq 3. \end{cases}$$

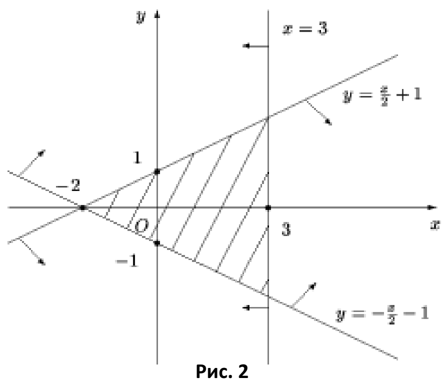

Рис. 2

2. Моделью угла (рис. 3) может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} y\geq x, \\ y\leq 2x, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

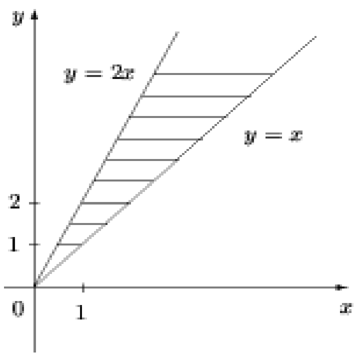

Рис. 3

Заметим, что число неизвестных в этих примерах равно двум и поэтому в процессе моделирования получается выпуклый многоугольник или выпуклая многоугольная область.

4. Выпуклый многогранник

Рассмотрим трехмерное пространство R^3, элементами которого являются упорядоченные тройки действительных чисел (x; y; z).

В действующих школьных учебниках по геометрии [2; 12; 13] в курсе стереометрии изучаются выпуклые многогранники – куб, тетраэдр, параллелепипед, призма, пирамида и др.

В школьном курсе геометрии приводится два способа определения выпуклого многогранника. «Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности». Такой подход принят в учебнике [12, с. 296]. «Многогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок» [13, с. 68]. В учебнике [4] за основу берется второе определение и показывается изоморфизм между этими двумя определениями.

По аналогии с выпуклыми многоугольниками согласно теории линейных неравенств решение системы линейных неравенств с тремя неизвестными в пространстве задает выпуклый многогранник (ограниченную фигуру) или выпуклую многогранную область (неограниченную фигуру).

Анализ определения выпуклого многогранника, приведенного в учебнике [12], показывает, что для алгебро-аналитического описания выпуклого многогранника необходимо знать описание полупространств, которыми он ограничивается.

Известно, что плоскость грани многогранника в пространстве задается уравнением:

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (4)$$

где a, b, c, $d \in$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$; x, y, z – неизвестные;

Заметим, что если плоскость задана уравнением (4), то неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + c + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает это пространство.

Пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_mx + b_my + c_mz + d_m = 0,$$

где a_1, b_1, c_1, d_1, ..., a_m, b_m, c_m, $d_m \in$; x, y, z – неизвестные; m – число граней выпуклого многогранника.

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств, и, следовательно, для всех его точек должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \geq 0, \end{cases} \qquad (5)$$

которая и определяет этот многогранник. Таким образом, построение алгебро-аналитической модели выпуклого многогранника свелось к построению системы линейных неравенств (5).

Примеры

1. Моделью единичного куба с одной из вершин, лежащей в начале координат (рис. 4), может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1, \\ 0 \le z \le 1. \end{cases}$$

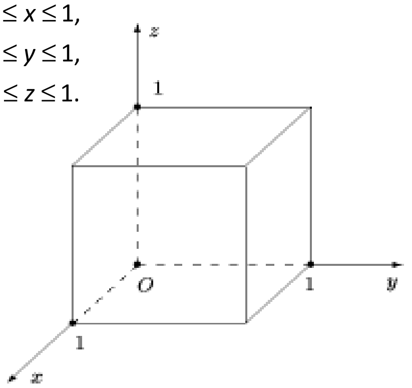

Рис. 4

2. Моделью треугольной пирамиды с взаимно перпендикулярными боковыми гранями и вершиной в начале координат (рис. 5) может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ z \ge 0, \\ x + y + z - 1 \le 0. \end{cases}$$

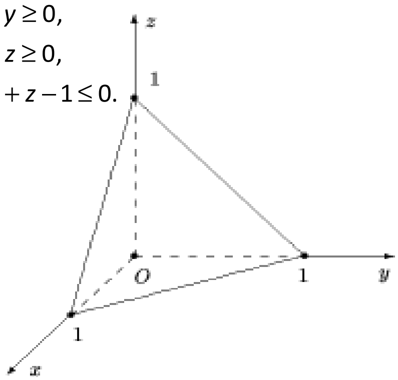

Рис. 5

3. Моделью первого квадранта трехмерного пространства (рис. 6) может служить следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

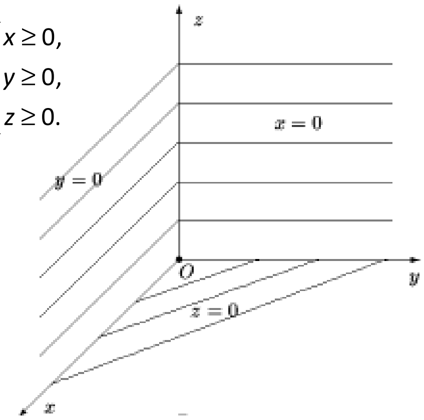

Рис. 6

Заметим, что число неизвестных переменных в этих примерах равно трем и поэтому в процессе моделирования получается выпуклый многогранник или выпуклая многогранная область.

Возможность обучения школьников умению моделировать выпуклый многоугольник и выпуклый многогранник системами линейных неравенств с двумя и тремя неизвестными соответственно служит средством выявления дополнительных знаний о них, а также является основой для множества приложений теории многогранников в различных разделах математики, например в теории оптимального управления, в линейном, а также в выпуклом программировании (см., например, [1; 10]).

Литература

1. *Абатурова, В.С.* Математическое моделирование школьникам. 1. Линейные модели: учеб. пособие / В.С. Абатурова; Ин-т прикладной математики и информатики. Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО – А, 2007.
2. *Александров, А.Д.* Геометрия: учебник для 10 классов школ с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. 3-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005.
3. *Александров, А.Д.* Геометрия для 8–9 классов: учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 1991.

4. *Александров, А.Д.* Геометрия для 10–11 классов: учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 1992.
5. Геометрия: учебник для 7–9 классов средних школ / Л.С. Атанасян [и др.]. 3-е изд. М.: Просвещение, 1992.
6. *Гнеденко, Б.В.* О роли математики в формировании у учащихся научного мировоззрения и нравственных принципов / Б.В. Гнеденко // Математика в школе. 1989. № 5.
7. *Колмогоров, А.Н.* Современная математика и математика в современной школе / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. 1971. № 6.
8. Концепция модернизации российского образования на периоддо 2010 года. Приложение к приказу Минобразования России от 11 февраля2002 г. № 393 // Модернизация российского образования: Приложение к журналу «Вестник образования». 2003. Март.
9. *Кудрявцев, Л.Д.* Современная математика и ее преподавание / Л.Д. Кудрявцев. М.: Наука: Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1980.
10. *Лунгу, К.Н.* Линейное программирование: руководство к решению задач / К.Н. Лунгу. М.: Физматлит, 2005.
11. *Маркушевич, А.И.* Об очередных задачах преподавания математики в школе/ А.И. Маркушевич // На путях обновления школьного курса математики. М.: Просвещение, 1978.
12. *Погорелов, А.В.* Геометрия: учебник для 7–11 классов общеобразовательных учреждений / А.В. Погорелов. 8-е изд. М.: Просвещение, 1998.
13. *Смирнова, И.М.* Геометрия: учеб. пособие для 10–11 классов естественно-научного профиля обучения / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. М.: Просвещение, 2001.
14. Федеральный компонент государственного стандарта общегообразования. Ч. 2. Среднее (полное) общее образование. М.: Министерство образования РФ, 2004.
15. *Фройденталь, Г.* Математика как педагогическая задача / Г. Фройденталь.М.: Просвещение, 1982–1983. Т. 1, 2.
16. *Штофф, В.А.* Моделирование и философия / В.А. Штофф. М.; Л.: Наука, 1966.