

УДК 001.895:512.64–053.5

**Абасов Ш.М.,
Шихалиев Х.Ш.**

РАННЕЕ ЗНАКОМСТВО С ПОНЯТИЕМ «ВЕКТОР» КАК ОДИН ИЗ ФАКТОРОВ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

Ключевые слова: вектор, методика, средство познания, качество знаний, обучение математике, внутрипредметные и межпредметные связи.

Начнем сразу с вопроса: является ли понятие «вектор» обязательным для изучения в школьном курсе математики? Ответ на этот вопрос большинства учителей и специалистов в этой области знаний известен: «Да». Тогда возникает другой вопрос: когда и как целесообразно начинать изучение вопросов векторного аппарата в школьном курсе?

Исчерпывающий ответ на этот вопрос пока трудно найти, поскольку школьный курс математики определяется годами, и до сих пор он еще не сформировался окончательно. С другой стороны, ответ на этот вопрос пока не созрел и потому, что его отражение в школьном курсе математики не формировалось с учетом современных требований к математическому образованию и возможности реализации этой темы в формировании математической культуры учащихся и раскрытии прикладных направлений изучаемого материала не только по математике.

Такое положение связано с тем, что сложившаяся практика изучения вектора в школьном курсе математики не отвечает адекватно требованиям общества к математическому образованию относительно гуманизации и гуманитаризации образования, к математическим знаниям как к средству реализации внутрипредметных и межпредметных связей в познании и обучении. Даже в проекте Стандартов второго поколения по математическому образованию для основной общеобразовательной школы [3] мы пока не находим ответа на этот вопрос.

Всероссийский съезд учителей математики в 2010 г. в Москве в своей резолюции подчеркивал, что «математическое образование – это важнейший и необходимый компонент развития личности, представляющий собой не только способ общения и

взаимодействия с окружающими, но и основу подготовки к будущей профессии, интеллектуального и творческого развития, понимания законов мироздания» [2, с. 4].

В качестве приоритетной задачи совершенствования системы обучения математике выступает тезис «Математика для всех». Значит, нужно обучать детей основам науки, которые необходимы личности для своего познавательного, описательного, образовательного и развивающего процессов. При этом невольно возникает вопрос: что может входить в смысл слов «математика для всех»? В поисках ответа на этот вопрос мы глубже взглянули на основы всей математической науки, ее познавательный и описательный аппарат.

В науке комплексно рассматриваются такие средства познания и фиксации фактов, как язык этноса, язык чисел, язык геометрии, язык алгебры, язык теории множеств и язык логики (математической логики) [6]. Эти шесть структурных компонентов понятия «математический язык» служат средством не только познания и описания фактов, но и раскрытия потенциальных возможностей математического образования в творческом развитии личности. Министр образования и науки РФ А.А. Фурсенко, отвечая на вопросы делегатов съезда математиков в 2010 г., сказал: «Надо и в школе, и в вузе научить думать» [2, с. 10]. Реализовать эту задачу возможно только тогда, когда школьный курс математики будет отражать в себе те средства познавательного, образовательного и воспитательного процесса, которые характерны для самой науки на данном уровне ее развития.

Таким образом, школьный курс математики, особенно курс математики основного общеобразовательного

звена (5–9-е классы), должен быть ориентирован не на сдачу ЕГЭ, а на системное отражение в своем содержании тех средств познания, которыми пользуется сама наука. В этом плане одним из таких основных понятий школьного курса математики является понятие «вектор», которое можно сравнить с понятием «число», изучаемым довольно длительное время по школьным программам, начиная с 1-го класса. Однако в школьной практике изучение вектора загнано в дальний угол школьной программы, в частности в конец 8-го или в начало 9-го класса, в то время как вектор, как и число, является не только объектом изучения, но и средством познания и осуществления доказательных рассуждений, средством реализации внутри- и межпредметных связей и прикладных направлений приобретаемых знаний по математике.

Теме изучения вектора в школе начиная с 7-го класса посвящено исследование У.М. Махсудовой. Однако это исследование не дает ответа на вопрос: почему именно с 7-го, а не с другого класса? Более того, это исследование не смогло дать исчерпывающего ответа на многочисленные вопросы, связанные с темой «Векторы» в школьном курсе математики, поскольку дискуссии на эту тему не прекращаются на протяжении многих лет и продолжались в течение всего XX в. На наш взгляд, такое положение связано с огромным разнообразием функций понятия «вектор» в науке и практике (рис. 1).

Формирование у учащихся умения применять векторный аппарат к решению задач, при познании новых объектов, доказательстве теорем – это одна из актуальных задач процесса обучения математике в школе. Поиск ответа на вопрос: можно ли изучать

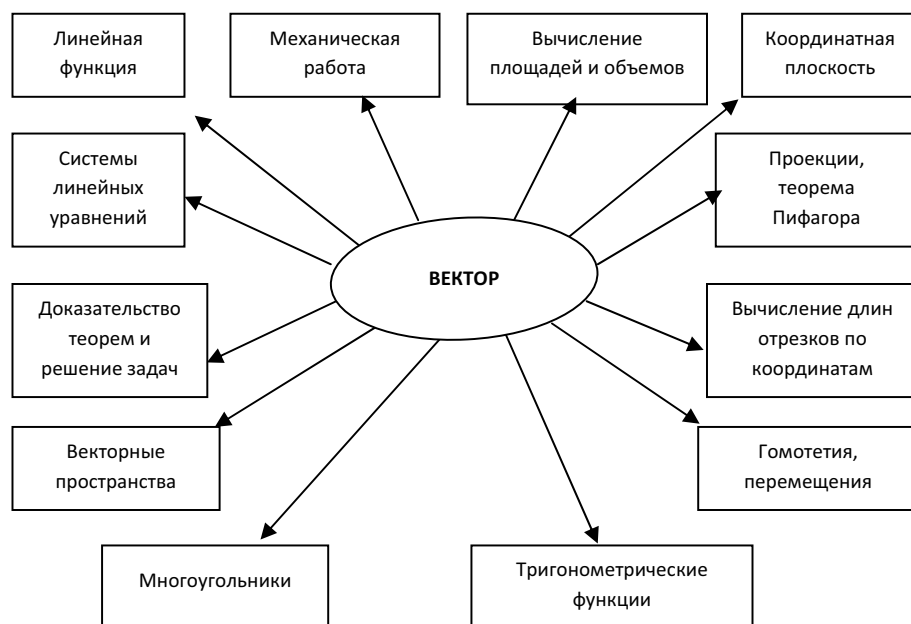


Рис. 1

вектор гораздо раньше того времени, что практикуется в школе? – стал предметом нашего исследования. В этом поиске мы остановились на 5-м классе как на начальной точке отправления. Дальнейшее продолжение знакомства с векторным аппаратом растянуто до 11-го класса включительно с учетом целесообразности той или иной информации о векторе, а также возможности применения приобретаемых знаний о нем в познании новых объектов, решении задач и доказательстве теорем и т.д. Эта цель определила формулировку проблемы исследования: «Интеграционный подход к раннему изучению вектора как один из факторов повышения качества знаний учащихся не только по математике».

Относительно дискуссионности в методике изучения вектора в общеобразовательной школе еще в 60-х гг. прошлого века А.А. Столяр писал: «С педагогической точки зрения важно

выявить, где и как векторы, аппарат векторной алгебры окажутся средством доказательства геометрических теорем и решения задач, приводящим к значительному упрощению этих доказательств и решений по сравнению с традиционными» [4, с. 40].

Это высказывание ученого-педагога с мировым именем содержит суть постановки нашего исследования относительно необходимости выявления роли векторного аппарата в формировании математической культуры школьников и повышении качества знаний учащихся не только по математике. Актуальность исследования относительно изучения вектора в школьном курсе математики становится на данном этапе обучения более выпуклой и заключается именно в том, что это исследование направлено на выявление места и роли векторного аппарата в школьном курсе математики, что стало созвучным с требованиями Стандартов математического образования в

основной школе второго поколения. В этих Стандартах подчеркивается: «В предметном направлении: овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения обучения в старшей школе или иных общеобразовательных учреждениях, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни; создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности» [3, с. 5].

Понятие «вектор», как и понятие «число», не относится к понятиям разового ознакомления, оно должно сопровождать весь процесс обучения математике в школе, поскольку векторный аппарат способствует формированию у учащихся универсальных учебных действий для основного общего и высшего образования. Дискуссии по вопросу изучения вектора, возможно, будут продолжаться, как и было в прошлом не только в СССР, но и за рубежом. Тем не менее до сих пор не отработана методика формулировки даже определения понятия «вектор». Таким образом, в российской общеобразовательной школе пока не имеется адекватной методики изучения векторного аппарата, которая могла бы наиболее эффективно раскрывать роль и место расположения материала по этой теме в программе по математическому образованию. Более того, в проекте Стандартов второго поколения по математическому образованию для основной общеобразовательной школы выделена тема «Векторы» в конце всей программы с указанием времени – 10 часов на ее прохождение, хотя там же, в Стандартах, в объяснительной записке сказано: «Авторы рабочих программ и учебников могут предложить собственный подход к структурированию учебного материала

и определению последовательности его изучения» [там же, с. 4].

Все вышесказанное подчеркивает то, что тема «Интеграционный подход к раннему изучению вектора как один из факторов повышения качества знаний учащихся не только по математике» является актуальной, поэтому нужно было разработать один из эффективных вариантов методики изучения вектора и использования его средства доказательных рассуждений и познания вообще.

Объект исследования – процесс обучения математике в 5–9-х классах.

Предмет исследования – процесс восприятия содержания понятия «вектор» учащимися 5–6-х классов и формирования у них умений применять эти знания при решении задач и доказательстве теорем в следующих классах.

Цель, объект и предмет исследования определили гипотезу: разработка соответствующих учебных материалов, где знакомство с векторным аппаратом происходит длительное время, и их внедрение в практику обучения математике в 5–9-х классах, начиная с 5-го, будут способствовать повышению качества знаний учащихся и положительно повлиять на формирование у школьников основ математической культуры.

Итак, в нашем исследовании изучение понятия «вектор» начинается с 5-го класса небольшими порциями информации о нем по линейно-концентрическому способу расположения материала. Например, осмысление самого понятия «вектор» происходит в 5-м классе в контексте изучения элементов курса геометрии, например после рассмотрения таких понятий, как «отрезок», «объединение и пересечение отрезков», «угол», «развернутый угол», «градусы», «виды углов»,

«перпендикулярные и параллельные, пересекающиеся прямые».

Возможность раннего знакомства с понятием «вектор» нужно искать в априорном его контакте с понятием «отрезок», которое знакомо учащимся с 1-го класса. Мы отходили от понятия «отрезок» на начальном этапе знакомства с вектором по линейно-концентрическому расположению материала. Одна из порций материала такова [1]:

У отрезка AB два конца: один конец – точка A , а другой конец – точка B .

Если один из этих концов отрезка принять за его начало, а другой – за его конец, то такой отрезок принимается за вектор и пишется: $\vec{AB}$, направление указано от начала к концу, или вектор $\vec{BA}$.

Два вектора считаются: 1) одинаково направленными, если угол между ними равен 0° ; 2) противоположно направленными, если угол между ними равен 180° . Два противоположно направленных вектора называются противоположными, если они равны по длине (рис. 2).

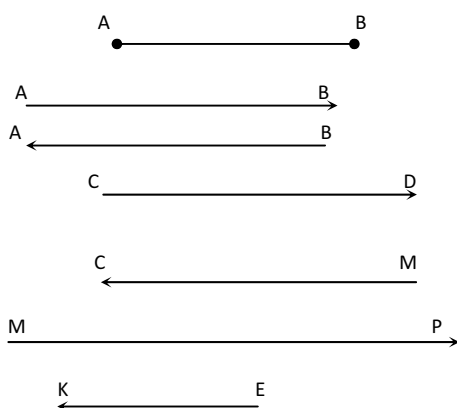


Рис. 2

Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равны, а векторы $\vec{AB}$ и $\vec{MP}$ одинаково направлены, век-

торы $\vec{MP}$ и $\vec{EK}$ противоположно направлены, векторы $\vec{CD}$ и $\vec{MC}$ противоположны.

Отрезок можно перемещать в любом направлении, а вектор при перемещении не меняет своего направления. Предложение: «Длина вектора $\vec{AB}$ » пишется: $|\vec{AB}|$. Если начало и конец вектора окажутся в одной точке, то такой вектор называется нуль-вектором, его длина равна нулю.

Все равные между собой векторы принимаются за один вектор.

Упражнения:

1. Начертите два равных отрезка: AB и CD . Могут ли быть равными и векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$? Ответ разъясните разными вариантами рисунков.

2. Даны векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$, имеющие длины по 3 см. Могут ли быть эти векторы равными? Начертите 4 вектора, равных вектору $\vec{AB}$.

3. Два вектора равны между собой. Что это означает? Могут ли быть неравными друг другу два вектора, если у них направления одинаковые? Если у них длины одинаковые? Начертите один вектор на пяти различных местах.

4. Прочтите записи и разъясните их смысл рисунками: $\vec{AB} = \vec{CD}$; $\vec{AB} = \vec{MP}$; $\vec{AB} \neq \vec{KE}$.

5. Даны истинные высказывания: $\vec{AB} = \vec{MP}$; $\vec{AK} = \vec{BE}$; $\vec{AB} \neq \vec{DC}$. Сделайте по ним один рисунок.

6. Даны два вектора, у которых направления различные. Могут ли быть такие векторы равными друг другу? Разъясните ответ рисунками.

7. Даны два вектора, у которых длины одинаковые. Могут ли быть

такие векторы равными между собой? Ответ разъясните рисунками. Начертите три вектора различных направлений.

Такое перерождение отрезка в вектор хорошо воспринимается учащимися на начальном этапе знакомства с ним. Однако для полного осмысления его содержания такое знакомство хотя необходимо, но недостаточно. Поэтому делаем следующий шаг: вводим понятие «равные векторы», оно способствует пониманию того, что слово «вектор» воспринимается как бесконечное множество равных между собой векторов, и все эти векторы, как «невидимки», расположены на любом месте плоскости или пространства. Значит, заданный вектор (направленный отрезок) – это лишь представитель бесконечного множества равных ему векторов. Такое осмысление понятия «вектор» закладывает основу для дальнейшей работы с этим понятием. Например, в 6-м классе учащиеся знакомятся со сложением и вычитанием векторов, аналогично тому, как образуется ломаная линия из отрезков, совмещая только конец одного отрезка с одним из концов следующего отрезка [1, с. 18]:

Пусть даны два вектора (рис. 3а). С их помощью можно образовать третий вектор следующим образом: конец вектора $\vec{AB}$ совместим с началом вектора $\vec{CD}$, при этом начало первого вектора и конец второго вектора образуют третий вектор $\vec{AD}$, который называется суммой данных двух векторов: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD}$ (рис. 3).

Физический смысл такой картины дает учащимся возможность закрепить содержание сложения векторов. На-

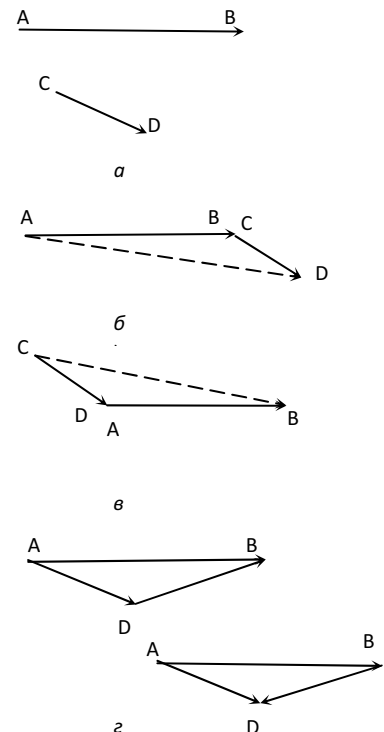


Рис. 3

пример, толкание автомашины двумя лицами. С другой стороны, если мы конец вектора $\vec{CD}$ совместим с началом вектора $\vec{AB}$ (рис. 3в), то образуется вектор $\vec{CB} = \vec{CD} + \vec{AB}$; векторы $\vec{AD}$ и $\vec{CB}$ равны между собой, они имеют равные длины и одинаковое направление. Значит, сложение векторов обладает свойством перестановки и сумма любых двух векторов есть вектор, т.е. на множестве векторов всюду выполняется сложение.

Теперь начало вектора $\vec{AB}$ (рис. 3а) совместим с началом вектора $\vec{CD}$ (рис. 3г), а их концы образуют новый вектор, который называется разностью вектора $\vec{AB}$ и вектора $\vec{CD}$, или

же вектора $\vec{CD}$ и вектора $\vec{AB}$. Тут имеется два варианта: в первом случае разность представляет вектор $\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{CD}$, во втором случае – вектор $\vec{BD} = \vec{CD} - \vec{AB}$, причем векторы $\vec{DB}$ и $\vec{BD}$ противоположны, подобно разности чисел: $7 - 3 = 4$ либо $3 - 7 = -4$: от перестановки вычитаемого и уменьшаемого ответы меняются на противоположные числа, но их модули равны. Значит, разность векторов есть вектор, т.е. на множестве векторов всюду выполняется вычитание.

Разность двух одинаковых векторов есть нуль-вектор, поскольку при выполнении вычитания совмещаются их начала и концы, расстояние между их концами равно нулю, т.е. мы имеем нуль-вектор.

Упражнения:

1. Начертите два равных вектора, а затем найдите их сумму и разность. Всегда ли сумма или разность векторов представляет вектор?

2. Начертите два не параллельных вектора. Найдите их сумму и разность. В каком случае два вектора и их сумма принадлежат одной прямой?

3. По рис. 3г определите сумму и разность векторов и запишите их верными равенствами.

4. Сделайте рисунок по каждой записи:

а) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD}$; б) $\vec{MP} - \vec{ME} = \vec{EP}$.

5. Начертите любой вектор, а затем найдите вектор, являющийся суммой трех таких векторов.

6. Дана одна точка. Образуется ли вектор этой точкой? Как называется такой вектор? Чему равна длина такого вектора?

Мнение о том, что понятие «вектор» относится к сложным понятиям и поэтому его невозможно изучать в 5-м классе, мы считаем ошибочным. Если знакомство с отрезком происходит гораздо раньше, то от отрезка до вектора только один шаг. Знакомство с вектором на раннем этапе, в частности с 5-го класса, открывает перед учащимися широкий путь познания и применения знаний на практике, путь к успешному изучению физики, где понятие вектора встречается раньше, чем в практике его изучения в математике, и прикладное направление вектора наиболее обширное.

Прежде всего мы разъясняем учащимся смысл слов «сдвиг», «движение», «двигаться» – как слов, имеющих один и тот же корень, в том числе и частные случаи движения: поворот, вращение вокруг точки, вокруг прямой линии и т.д. Все варианты движения делим на два вида: движения, где направление не меняется, и движения, где направление изменяется. Относя вектор к тем движениям, где направление не меняется (направление на север, на восток и т.д.), учащиеся осознают смысл понятия. Такая метаматематическая база формирования понятия вектора в 5-м классе создает возможность для перехода от предметно-практической к предметно-образной деятельности в дальнейшем. Такой базовый материал по векторам в 5–6-х классах создает прочную основу для работы с векторами в будущем. Даже учащимися 6-го класса легко воспринимается такое понятие, как «коллинеарные векторы» [1, с. 21], осмысливается равенство $\vec{AB} = k\vec{CD}$, где $k \in R$.

Продолжение темы «Векторы» рассматривается в 7, 8 и 9-м классах. В этих классах больше всего вектор работает как средство познания (в доказательстве многих теорем и т.д.).

Вывод: раннее изучение вектора по линейно-концентрическому способу расположения материала начиная с 5-го класса способствует усилению роли принципа укрупнения дидактических единиц при обучении математике, реализации прикладных направлений этой темы и формированию общематематической культуры школьника.

Литература

1. Абасов Ш.М. Учебно-экспериментальный материал по теме «Вектор». Махачкала, 2009.
2. Дворников С.В. Всероссийский съезд учителей математики в МГУ: тревоги и надежды // Математика в школе. 2011. № 1. С. 8–13.
3. Стандарты второго поколения. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5–9 классы. М.: Просвещение, 2010.
4. Столяр А.А. Педагогика математики. Минск: Высшая школа, 1969.
5. Шихалиев Х.Ш. Геометрия на плоскости. 5–9: учеб.-эксперим. пособие. Махачкала: ДГПУ, 2010.
6. Шихалиев Х.Ш. Об альтернативном подходе к разработке школьных курсов математики. Махачкала: ДГПУ, 2010.