УДК 514+371

Виситаева М.Б.

ЗАДАЧИ НА ПРОЯВЛЕНИЕ «ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ»

Ключевые слова: геометрическое зрение, взаимопроникающие фигуры, задача на упаковку, полимино, пентакубики.

В современной школе задача формирования и развития у учащихся математических способностей, и в частности развития их «геометрического зрения», является наиболее актуальной.

Рассматриваемые в этой статье задачи направлены в первую очередь на выявление «геометрического зрения» (при этом используется термин «взаимопроникающие фигуры»), аналитико-синтетическую деятельность учащихся.

«Взаимопроникающие фигуры» имеют часть общей площади: одними своими частями они перекрывают друг друга, а другими частями не совпадают [7].

В.В. Журавлев отмечал, что «одним из наиболее серьезных препятствий к усвоению геометрии является недостаточное развитие у учащихся "геометрического зрения", т.е. умения видеть на чертеже не только то, что "бросается в глаза", но и все, что там есть» [4].

Развитое «геометрическое зрение» предполагает умение:

– охватывать взором весь чертеж и улавливать те соотношения между элементами чертежа, которые могут быть нужны при решении данного вопроса (Н.М. Бескин);
– видеть геометрические объекты умственным взором (В.М. Брадис);
– мысленно преобразовать фигуру (Г.А. Владимирский) и т.д.

Характеризуя аналитико-синтетическую деятельность, зафиксируем основные положения в этой области.

В методике преподавания математики терминами «анализ» и «синтез», как правило, называют два противоположных по ходу движения мысли рассуждения: анализ – это рассуждение, идущее от того, что надо доказать или найти, к тому что дано или уже доказано ранее; синтез – рассуждение, идущее в обратном порядке.

Без них невозможны даже элементарные и простейшие формы психической деятельности – ощущение, восприятие. Конкретное есть единство многообразного. Нельзя познать это конкретное, не расчленяя его на составные части и элементы, не анализируя их.

Анализ и синтез практически неотделимы друг от друга, они сопутствуют друг другу, дополняя друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод. Так, при помощи анализа сложные задачи расчленяются на ряд простых задач, а затем посредством синтеза происходит соединение решений этих простых задач в единое целое.

Без анализа и последующего осмысления его результатов (синтеза), без сведения к простому и воспроизведения сложного на основе упрощенного, проанализированного не может осуществляться процесс познания, да и вообще ориентирование в окружающем мире [3].

Задачи на проявление «геометрического зрения» на базовом уровне (задачи на пересечение и объединение фигур)

«Геометрическое зрение» при решении задач на пересечение и объединение фигур проявляется в том, что в исходном рисунке (реальном или воображаемом) учащийся видит, или не видит, или частично видит элементы пересечения и объединения фигур (взаимопроникающих фигур). Чтобы вести поиск, нужна «идея» (анализ), мысленное представление того, как могут быть расположены эти фигуры.

Задачи на воображение с опорой на восприятие

Задача 1. Дан куб (рис. 1). Изобразите на его поверхности ломаную из 4 звеньев.

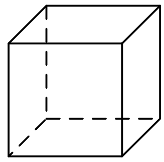

Рис. 1

Задача 2. Составьте задачу, аналогичную предыдущей, и решите ее.

Отрезок, соединяющий две противоположные вершины куба (наиболее удаленные друг от друга), называется диагональю куба.

Задача 3. Как измерить внутреннюю диагональ кирпича линейкой, имея при этом несколько кирпичей?

Схема рассуждений и ход решения. Для решения задачи достаточно сложить три кирпича, как показано на рис. 2.

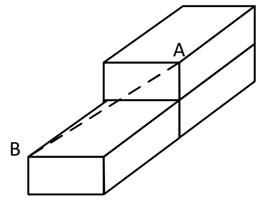

Рис. 2

Задача 4. Как измерить диагональ непустого куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть: а) еще два таких же куба; б) один такой же куб?

Схема рассуждений и ход решения:

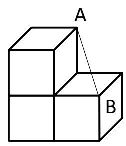

Рис. 3

а) для решения задачи достаточно сложить три куба, как показано на рис. 3. При этом образуется выемка в форме такого же куба. Поэтому, приложив линейку, можно измерить его диагональ;

б) так как куб один, то полый куб, как и в случае (а), можно получить, если отметить на листе бумаги положение куба (обведя его основание), а затем сдвинуть его.

Задача 5. Сколько различных тел можно построить, соединяя два соседних кубика только по граням: а) из трех кубиков; б) из четырех кубиков?

Схема рассуждений и ход решения. Для лучшего восприятия можно изготовить модели кубиков из древесины (рис. 4). В соответствии с условием задачи можно построить: а) из трех кубиков – две различные фигуры; б) из четырех – восемь.

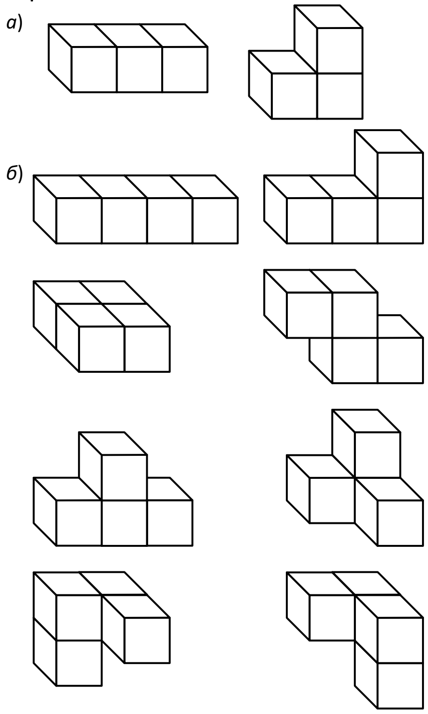

Рис. 4

Задача 6. Возьмите 6 кубиков и сложите из них разные параллелепипеды. Сколько параллелепипедов можно сложить? Какова наибольшая длина параллелепипеда, выложенного из 6 кубиков?

Задачи на упаковку

Панграмма – это попытка вместить как можно больше различных букв в как можно более короткое осмысленное предложение.

В математике задачей на упаковку принято называть задачу, в которой заданное множество математических объектов требуется как можно более экономно упаковать в заданном пространстве по заданным правилам. С точки зрения геометрии такую задачу можно рассматривать как задачу об одномерной упаковке – упаковке стержней различной длины в длинные трубы, в которые стержни плотно входят (М. Гарднер).

В развитом индустриальном обществе возникают проблемы, связанные с упаковкой трехмерных объектов в заданную область: это и хранение продукции на складах, и размещение предметов в ящиках, и т.д.

Интересными упражнениями являются задачи на построение прямоугольников и других плоских фигур заданной площади, нахождение размеров прямоугольных коробок заданной вместимости.

Задача 7. Можно ли переложить бруски, изображенные на рис. 5, так, чтобы получился куб? Если да, то каковы будут размеры такого куба?

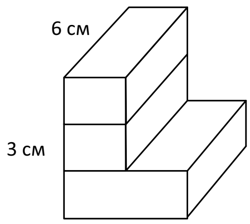

Рис. 5

Схема рассуждений и ход решения. Для решения задачи нужно переложить верхний брусок, и тогда получится куб (рис. 6). Размеры куба: длина ребра куба равна 6 см.

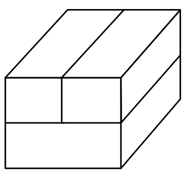

Рис. 6

Особенный интерес представляют задачи, имеющие несколько возможных решений. Полезно демонстрировать разные способы решения одной и той же задачи. На уроке можно разбить класс на группы и предложить каждой группе решить задачу различными способами. После этого учащиеся сравнивают различные способы решения задач и выбирают (аргументируя) наиболее привлекательный из них.

Задача 8. Возьмите 8 кубиков и сложите из них разные прямоугольные параллелепипеды.

Задача допускает несколько вариантов решений (рис. 7).

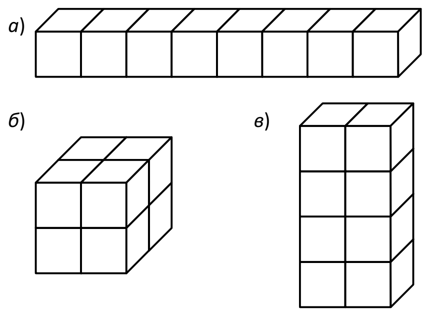

Рис. 7

Задача 9. Определить размеры коробки (или изготовить коробку) прямоугольной формы, в которую затем должны быть помещены 12 кубиков заданного размера.

Задача также допускает несколько вариантов решений (рис. 8). Здесь же может быть оценен каждый из них с точки зрения расхода материала.

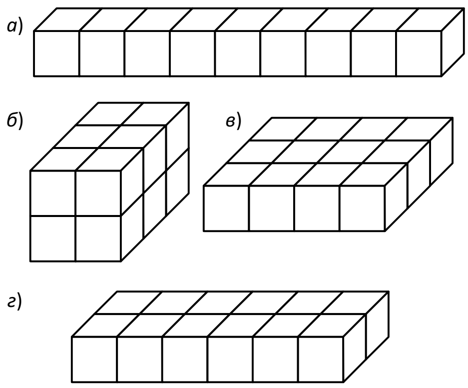

Рис. 8

Задачи на воображение без опоры на восприятие (на мысленное перемещение и реконструкцию геометрических фигур, заданных по описанию)

Задача 10. Из одинаковых кусочков проволоки спаяли куб. Сколько паек было сделано?

Схема рассуждений и ход решения. Решение задачи следует начать с представления мысленного образа объекта – куба. Наименьшее число паек будет равно восьми, независимо от того, как сгибать проволоку. Поскольку на каждой вершине встречается нечетное число граней, придется делать пайку на всех восьми вершинах куба.

Задача 11. Возьмите 6 кубиков и сложите из них разные прямоугольные параллелепипеды. Сколько можно сложить таких параллелепипедов? Если ребро куба принять за единицу длины, то какова единица измерения этих параллелепипедов?

Задача 12. В ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 6 дм, 4 дм и 5 дм, укладывают коробочки с лекарством, имеющие измерения 1 см, 2 см и 3 см. Сколько коробочек поместится в ящике?

Задача 13. В контейнер, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 7 дм, 5 дм и 6 дм, укладывают пачки мятных пластинок с измерениями 1 см, 3 см и 5 см. Сколько пачек поместится в контейнере?

Учащимся можно предложить написать геометрическое сочинение (рассказ, сказку) о пересечении и объединении фигур. Это задание целесообразно дать в качестве домашнего задания. Подобные задания вызывают интерес у учащихся и выполняются ими с удовольствием.

Задачи на проявление «геометрического зрения» при продвинутом изучении геометрического материала (задачи на пересечение и объединение фигур)

Значительное внимание уделяется задачам, в которых рассматривается взаимное положение фигур, их пересечение или объединение, выделяются те или иные их элементы либо один и тот же элемент включается в разные фигуры и т.п.

Задачи на воображение с опорой на восприятие

Задача 14. Две фигуры склеены так, что совпали одинаковые метки на их гранях (рис. 9). Изобрази фигуру, которая получилась.

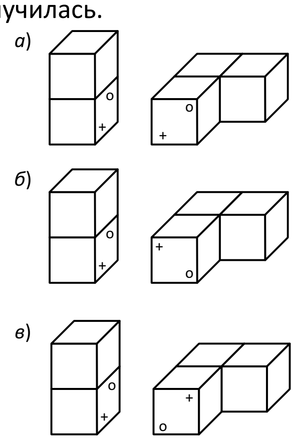

Рис. 9

Схема рассуждений и ход решения. Для решения этой задачи нужно повернуть одну из фигур так, чтобы совпали одинаковые метки на их гранях (рис. 10). Изобразим фигуры, которые получаются:

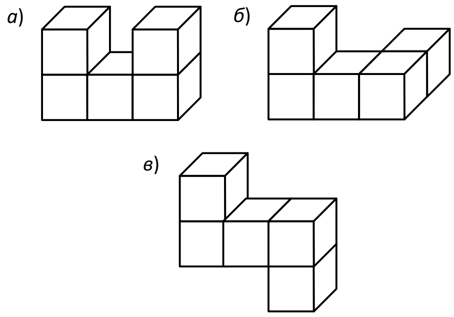

Рис. 10

Или можно предложить учащимся и другую задачу на мысленное оперирование образами.

Это задание требует неоднократного мысленного поворота куба, сопоставления изображенных на его гранях фигур, определения взаимного их расположения. Выполнение задания требует постоянного изменения мысленно образа, его расположения в пространстве с добавлением к нему новых элементов. Важнейшая его особенность – фиксировать мысленно, удерживать некоторые время образы промежуточных этапов.

Задача 15. Определите, какая из фигур А, Б, В, Г, Д входит в каждую из фигур 1 и 2, состоящих из шести кубиков каждая (рис. 11).

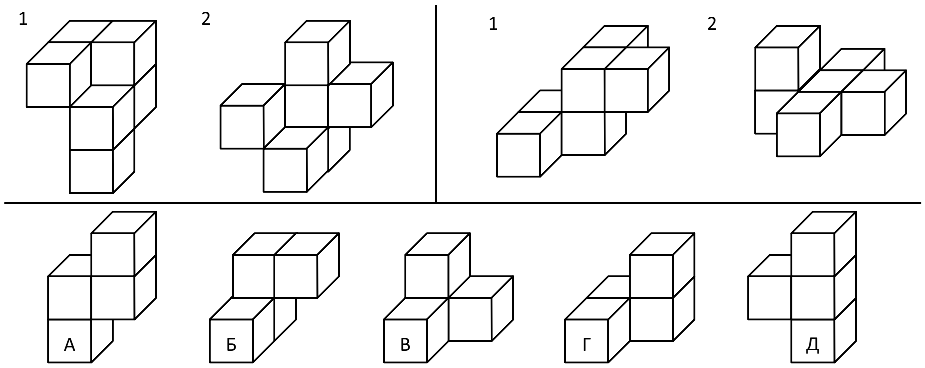

Рис. 11

Схема рассуждений и ход решения. Для решения задачи нужно мысленно совмещать каждую из фигур А, Б, В, Г, Д с фигурами 1 и 2, изображенными на рис. 11. В результате такого совмещения получаем, что фигура Б входит в фигуру 2, расположенную слева, и фигура Г входит в фигуру 1, расположенную справа.

Решение этих задач требует постоянного изменения мысленного образа, его расположения в пространстве с добавлением к нему новых элементов. Важным фактом здесь является то, что нужно фиксировать мысленно и удерживать некоторое время образы промежуточных этапов.

Или можно предложить учащимся и другую задачу на мысленное оперирование образами.

Задача 16. Имеется набор одинаковых кубиков со сквозным отверстием, соединяющим две соседние грани куба. Требуется склеить из набора наименьшее число кубиков так, чтобы концами туннеля были отмеченные в параллелепипеде 4 × 3 × 3 отверстия (рис. 12). Сделайте это «в уме».

При выполнении ряда заданий от учеников не требуется строгого обоснования результата. Их цель иная – научить детей рассматривать геометрические объекты в динамике. Она не должна быть осложнена другими видами деятельности. Другая цель, которая достигается указанными заданиями – включение учащихся в целостное восприятие. Достаточно часто нужно мысленно перемещать геометрические объекты и наблюдать за изменением [6].

Пространственное полимино

Многочисленные любители пентамино давно уже обнаружили возмож-

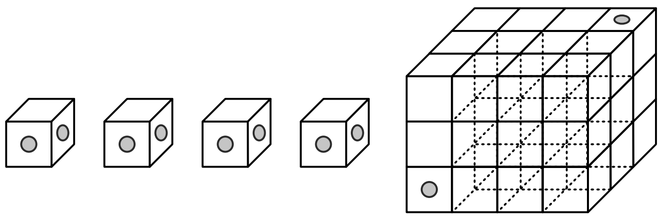

Рис. 12

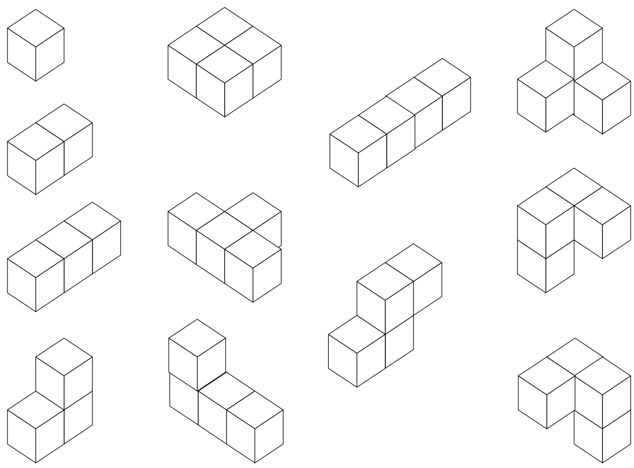

Рис. 13

ность образования фигур не из пяти квадратов, а из пяти кубов. Из этих заготовок можно составлять различные пространственные тела. Не обязательно, конечно, ограничиваться числом 5: в принципе можно выписать и пересчитать различные пространственные полимино с любым заданным числом элементов.

На рис. 13 показаны все тетрамино (где полимино задаются с точностью до положения в пространстве) [2].

Пентакубики – это фигуры, состоящие из 5 кубиков, соединенных между собой «грань к грани».

Задачи о пространственных пентамино

Задачи эти относятся к пространственным пентамино, т.е. к 12 телам, составленным из пяти единичных кубов, каждое из которых имеет форму обычного пентамино.

Пространственные модели наших пентамино можно построить из 60 кубиков (рис. 14).

Задача 17. Сложите прямоугольный параллелепипед размером 3 × 4 × 5.

Задача 18. Сложите из 28 пентакубиков прямоугольный параллелепипед размером 2 × 5 × 14.

Ученику при выполнении этих заданий необходимо выполнять разнообразные виды деятельности: от чтения чертежей до мысленного динамического оперирования пространственными объектами, включающего их переконструирование.

Хотя предлагаемые задачи предназначены преимущественно учащимся 5–6-х классов, но они также будут полезны для формирования математических способностей учащихся и в последующих классах.

Многие из перечисленных здесь задач ценны тем, что предметы, о которых в них говорится, учащиеся могут изготовить сами. Нетрудно согнуть проволоку и проверить по ней свои решения задач, не вызовет технических затруднений разрезать подкрашенные деревянные кубы на части и т.д. Однако во всех случаях модели желательно делать после решения задачи, а не для решения. Если учитель начинает решение предлагаемых задач с рассмотрения моделей (т.е. с непосредственного восприятия), то пострадают такие умственные процессы мыслительной деятельности, как представление и воображение. Оригинальность задач вызывает у учащихся интерес, что является одним из необходимых условий успешного изучения предмета.

Учет возрастных и индивидуальных особенностей имеющихся возможностей учащихся на практике требует от учителя четких представ-

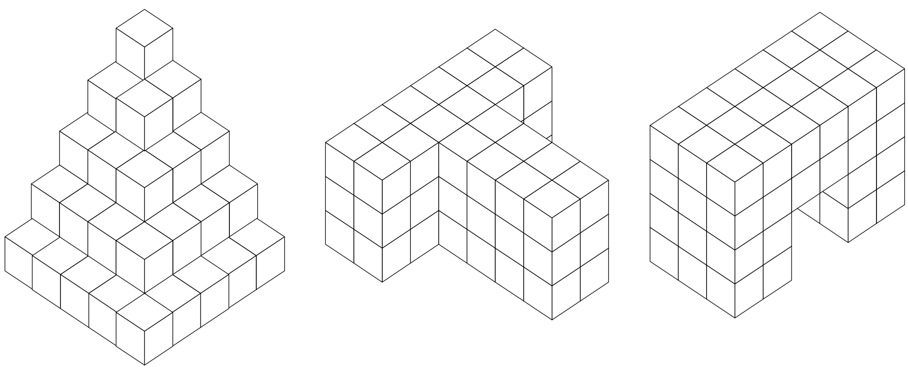

Рис. 14

лений о возможностях каждого ученика, степени его подготовленности, динамике роста его потенциала, что способствует успешной самореализации учащегося [5].

С учетом этого должны предлагаться индивидуальные задачи. Важно как предупредить неудачу, так и предлагать способным ученикам задачи, требующие интенсивной работы.

Приведенный выше материал, естественно, не исчерпывает всего многообразия работы по данному направлению. Однако он показывает определенную систему задач и упражнений, при выполнении которых формируются и развиваются умения выделять взаимопроникающие элементы геометрических фигур на примерах задач на пересечение и объединение фигур.

Литература

1. *Виситаева М.Б.* Взаимопроникающие элементы геометрических фигур // Problèmes, exercices et jeux créatifs (Actes du Colloque International France). Saint-Sorlin d'Arves: Editions du JIPTO, 2008. P. 78–81.
2. *Голомб С.В.* Полимино. М.: Мир, 1975.
3. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Академия, 2003.
4. *Журавлев В.В.* О математическом зрении // Математика в школе. 1940. № 5. С. 72–76.
5. *Лазарев В.А.* Педагогическое сопровождение одаренных старшеклассников. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2005.
6. *Цукарь А.Я.* Методические основы обучения математике в средней школе с использованием образного мышления: дис. … д-ра пед. наук. М., 1999.
7. *Якиманская И.С.* Уровни анализа, синтеза и абстракции при чтении чертежа у учащихся IV–VIII классов // Вопросы психологии. 1959. № 1. С. 114–126.